УДК 517.514.5

О. М. Литвин, В. В. Федько

Узагальнена кусково-ермітова інтерполяція

В роботі [1] запропонована формула розкладу функції в околі паралелепіпеда в R^m і на її основі пропонується прямий метод розв'язку крайових задач для диференціальних рівнянь. У цій роботі проводимо дальше узагальнення результатів попередньої роботи в тому розумінні, що розглядаємо многокутну область T, складену з прямокутників, яку розбиваємо лініями, паралельними координатним осям, потім будуємо функцію, яка на одержаних вузлових лініях збігається із значеннями заданої функції і її похідними до порядку $m-1$ по кожній змінній (узагальнена кусково-ермітова інтерполяція). Наводимо залишковий член, який одержуємо при цьому, і проводимо його оцінку. Подібна інтерполяція описана в роботах [2, 3], в яких вводиться узагальнена лагранжева інтерполяція, котра дає збіг функції тільки з її значеннями на вузлових лініях.

Надалі передбачаємо використовувати одержані результати для розв'язку крайових задач для диференціальних рівнянь. З метою наочності виклад буде вестись в просторі R^2.

Введемо деякі позначення і означення. Через I будемо позначати прямокутник $[a, b] \times [c, d]$, через I_e — одиничний квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$; $D^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}$.

Розбиття прямокутника I прямими, паралельними осям координат (ректангуляція), позначимо $\pi = \pi_1 \times \pi_2$, де

$$\pi_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N_1+1} = b; \quad \pi_2 : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{N_2+1} = d.$$

Означення 1 [4]. Через $K^{p,r} \times K^{p,r}(I)$ позначатимемо множину дійсних функцій $f(x, y)$, означенних на I таких, що $D^{(i,j)}f \in C(I)$ при $0 \leq i, j \leq p-1$, а $D^{(i,j)}f \in L_r(I)$ при $0 \leq i, j \leq p$.

Означення 2. Нехай дано деяке розбиття $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ прямокутника I. Будемо говорити, що функція $g(x, y) \in H^{(m)}K^{p,r}(I, \pi)$ тоді і тільки тоді, коли на кожному з прямокутників $[x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}] \subset I$

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{2m-1} \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_{klij} x^i y^j, \quad \alpha_{klij} \in K^{p,r} \times K^{p,r}(I).$$

Означення 3. Нехай $f(x, y) \in C^{m-1,m-1}(I)$. Будемо називати узагальненою $H^{(m)}K^{p,r}(I, \pi)$ — інтерполяцією функції $f(x, y)$ деяку функцію $L_{m\pi} \in H^{(m)}K^{p,r}(I, \pi)$ таку, що

$$D^{(\alpha_1,0)}f(x_k, y) = D^{(\alpha_1,0)}L_{m\pi}(x_k, y); \quad D^{(0,\alpha_2)}f(x, y_l) = D^{(0,\alpha_2)}L_{m\pi}(x, y_l), \tag{1}$$

де $k = \overline{0, N_1+1}$, $l = \overline{0, N_2+1}$, $\alpha_1, \alpha_2 = \overline{0, m-1}$, $p \geqslant m$.

Теорема 1. *Функцію $L_{m\pi}(x, y)$ можна зобразити у вигляді*

$$L_{m\pi}(x, y) = \sum_{k=0}^{N_1+1} \sum_{i=0}^{m-1} h_{k,i}(x) \frac{(x - x_k)^i}{i!} D^{(i,0)}f(x_k, y) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{N_2+1} \sum_{j=0}^{m-1} h_{l,j}(y) \frac{(y - y_l)^j}{j!} D^{(0,j)}f(x, y_l) -$$

$$- \sum_{k,l=0}^{N_1+1,N_2+1} \sum_{i,j=0}^{m-1} h_{k,i}(x) \frac{(x - x_k)^i}{i!} h_{l,j}(y) \frac{(y - y_l)^j}{j!} D^{(i,j)}f(x_k, y_l), \tag{2}$$

де функції $h_{k,i}(x)$ визначаються таким чином:

$$h_{k,i}(x) = \begin{cases} h_{1,k,i}(x) = \int\limits_0^{\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}} v^{m-1}(1-v)^{m-1-i}dv \Big/ \int\limits_0^1 v^{m-1}(1-v)^{m-1-i}dv, \\ \hfill x \in [x_{k-1}, x_k]; \\ h_{0,k,i}(x) = \int\limits_0^{\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}} v^{m-1}(1-v)^{m-1-i}dv \Big/ \int\limits_0^1 v^{m-1}(1-v)^{m-1-i}dv, \\ \hfill x \in [x_k, x_{k+1}]; \\ 0, \hfill x \overline{\in} [x_{k-1}, x_{k+1}]. \end{cases} \tag{3}$$

Функцію $L_{m\pi}(x, y)$ будемо називати узагальненою інтерполянтою Ерміта.

Доведення. Проведемо доведення для $x = x_t$ і α, де $0 \leq t \leq N_1+1$, $0 \leq \alpha \leq m-1$;

$$D^{(\alpha,0)}L_{m\pi}(x, y) = \sum_{k=0}^{N_1+1} \sum_{i=0}^{m-1} D^{(\alpha,0)}\left(h_{k,i}(x) \frac{(x - x_k)^i}{i!}\right) D^{(i,0)}f(x_k, y) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{N_2+1} \sum_{j=0}^{m-1} h_{l,j}(y) \frac{(y - y_l)^j}{j!} D^{(\alpha,j)}f(x, y_l) - \sum_{k,l=0}^{N_1+1,N_2+1} \sum_{i,j=0}^{m-1} D^{(\alpha,0)}\Bigg(h_{k,i}(x) \times$$

$$\times \frac{(x - x_k)^i}{i!}\Bigg) h_{l,j}(y) \frac{(y - y_l)^j}{j!} D^{(i,j)}f(x_k, y_l). \tag{4}$$

Враховуючи те, що $f(x, y) \in C^{m-1,m-1}(I)$ і

$$D^{(\alpha,0)}\left(h_{k,i}(x) \frac{(x - x_k)^i}{i!}\right)\Bigg|_{x=x_t} = \delta_{\alpha,i} \cdot \delta_{k,t}; \quad \alpha, i = \overline{0, m-1}; \; k, t = \overline{0, N_1+1}, \tag{5}$$

$\delta_{\alpha,i}$ — символ Кронеккера, одержуємо

$$D^{(\alpha,0)} L_{m\pi}(x_t, y) = D^{(\alpha,0)} f(x_t, y) + \sum_{l=0}^{N_2+1} \sum_{j=0}^{m-1} h_{l,j}(y) \frac{(y-y_l)^j}{j!} D^{(\alpha,j)} f(x_t, y_l) -$$

$$- \sum_{l=0}^{N_2+1} \sum_{j=0}^{m-1} h_{l,j}(y) \frac{(y-y_l)^j}{j!} D^{(\alpha,j)} f(x_t, y_l) = D^{(\alpha,0)} f(x_t, y),$$

що і треба було довести.

Для залишкового члена наближення функції $f(x, y)$, заданої на одиничному квадраті I_e за допомогою узагальненої інтерполянти $L_{m\pi}$ у випадку, якщо інтерполяція проводиться тільки по сторонах квадрата ($\pi = I_e$), має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $L_{m\pi}(x, y)$ є узагальненою інтерполянтою Ерміта функції $f(x, y) \in K^{p,r} \times K^{p,r}(I_e)$, де $\pi = I_e$, $p \geqslant m$, тоді*

$$F(f) = D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f - L_{m\pi})(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 k_{\alpha_1,m,s}(t, x)\, k_{\alpha_2,m,s}(z, y)\, D^{(s,s)} f(t, z)\, dt dz, \quad (6)$$

де $\alpha_1, \alpha_2 = \overline{0, s-1}$, $s = \min(p, 2m)$, $(x, y) \in I_e$ і *ядра $k_{\alpha,m,s}(t, x)$ визначаються за формулою*

$$k_{\alpha,m,s}(t, x) = \frac{(x-t)^{s-1-\alpha} + |x-t|(x-t)^{s-2-\alpha}}{2(s-1-\alpha)!} -$$

$$- \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(1-t)^{s-1-i}}{(s-1-i)!} D^{(\alpha,0)} \left(h_{1,1,i}(x) \frac{(x-1)^i}{i!} \right). \quad (7)$$

Доведення. Перепишемо вираз для $F(f)$ у такому вигляді:

$$F(f) = D^{(\alpha_1,\alpha_2)} \Bigg[f - \sum_{k=0}^{N_1+1} \sum_{i=0}^{m-1} h_{ki}(x) \frac{(x-x_k)^i}{i!} D^{(i,0)} f(x_k, y) +$$

$$+ f - \sum_{l=0}^{N_2+1} \sum_{j=0}^{m-1} h_{l,j}(y) \frac{(y-y_l)^j}{j!} D^{(0,j)} f(x, y_l) -$$

$$- f + \sum_{k,l=0}^{N_1+1, N_2+1} \sum_{i,j=0}^{m-1} h_{k,i}(x) \frac{(x-x_k)^i}{i!} h_{l,j}(y) \frac{(y-y_l)^j}{j!} D^{(i,j)} f(x_k, y_l) \Bigg].$$

Враховуючи рівності (2.8) і (6.4) з [4], одержуємо

$$F(f) = \int_0^1 k_{\alpha_1,m,s}(t, x) D^{(s,\alpha_2)} f(t, y)\, dt + \int_0^1 k_{\alpha_2,m,s}(z, y) D^{(\alpha_1,s)} f(x, z)\, dz -$$

$$- \Bigg(\int_0^1 k_{\alpha_1,m,s}(t, x) D^{(s,\alpha_2)} f(t, y)\, dt + \int_0^1 k_{\alpha_2,m,s}(z, y) D^{(\alpha_1,s)} f(x, z)\, dz -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 k_{\alpha_1,m,s}(t, x)\, k_{\alpha_2,m,s}(z, y)\, D^{(s,s)} f(t, z)\, dt dz \Bigg) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 k_{\alpha_1,m,s}(t, x)\, k_{\alpha_2,m,s}(z, y)\, D^{(s,s)} f(t, z)\, dt dz,$$

що і треба було довести.

Поширимо результат теореми 2 на довільний прямокутник I.

Для $f(x, y) \in K^{p,r} \times K^{p,r}(I)$ при $p \geqslant m$ рівність (6) можна записати як

$$F(f) = D^{(\alpha_1,\alpha_2)}\{f(a + x(b-a), c + y(d-c)) - L_{m\pi}(a + x(b-a), c + y(d-c))\} =$$
$$= (b-a)^{s-\alpha_1}(d-c)^{s-\alpha_2}\int_0^1\int_0^1 D^{(s,s)}f(a + t(b-a), c + z(d-c)) \times$$
$$\times k_{\alpha_1,m,s}(t, x)\, k_{\alpha_2,m,s}(z, y)\, dtdz, \tag{8}$$

де $s = \min(p, 2m)$.

Застосувавши до рівності (8) нерівність Гельдера, одержуємо оцінку для $F(f)$.

Наслідок 1. *Нехай $f \in K^{p,r} \times K^{p,r}(I)$, тоді при $p \geqslant m$ має місце така нерівність:*

$$\| D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f - L_{m\pi})\|_{L_q(I)} \leqslant K(b-a)^{s-\alpha_1-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}(d-c)^{s-\alpha_2-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}\| D^{(s,s)}f\|_{L_r(I)}, \tag{9}$$

де $s = \min(p, 2m)$; $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant s-1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Доведення. З формули (7) випливає, що $k_{\alpha_1,m,s}(t, x)\, k_{\alpha_2,m,s}(z, y)$ рівномірно обмежені на $I \times I$, отже, при $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ функція

$$g_{\alpha_1,\alpha_2 m,s,r}(x, y) = \left(\int_0^1\int_0^1 | k_{\alpha_1,m,s}(t, x)\, k_{\alpha_2,m,s}(z, y)|^{r'} dtdz\right)^{\frac{1}{r'}} \tag{10}$$

є елементом множини $L_q(I_e)$, де $1 \leqslant q \leqslant \infty$, і

$$\| g_{\alpha_1,\alpha_2,m,s,r}(x, y)\|_{L_q(I_e)} = \left(\int_0^1\int_0^1 | g_{\alpha_1,\alpha_2,m,s,r}(x, y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}} = c_{\alpha_1,\alpha_2,m,s,r,q} \leqslant K. \tag{11}$$

Константа K означає тут і надалі загальну константу, яка не залежить від f, але залежить від α_1, α_2, m, a, b. Використовуючи результати [5], можна визначити верхню межу для постійних $c_{\alpha_1,\alpha_2,m,s,r,q}$:

$$c_{0,0,m,2m,\infty,\infty} = \frac{1}{2^{4m}(2m)!^2};$$

$$c_{\alpha_1,\alpha_2,m,2m,\infty,\infty} \leqslant \frac{1}{2^{2m-2\alpha_1}\cdot 2^{2m-2\alpha_2}\alpha_1!\alpha_2!(2m-2)^2}, \quad 1 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant m. \tag{12}$$

Оскільки $f(a + t(b-a),\ c + z(d-c)) \in K^{p,r} \times K^{p,r}(I)$, то має смисл

$$\| D^{(s,s)}f(a + t(b-a), c + z(d-c))\|_{L_r(I_e)} =$$
$$= \left(\int_0^1\int_0^1 | D^{(s,s)}f(a + t)(b-a), c + z(d-c))|^r dtdz\right)^{\frac{1}{r}} =$$
$$= (b-a)^{-\frac{1}{r}}(d-c)^{-\frac{1}{r}}\left(\int_a^b\int_c^d | D^{(s,s)}f(x, y)|^r dxdy\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{13}$$

Враховуючи формули (10), (13) і застосовуючи до (8) нерівність Гельдера, одержуємо таку нерівність:

$$| D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f - L_{m\pi})(a + x(b-a), c + z(d-c))| \leqslant (b-a)^{s-\alpha_1-\frac{1}{r}}(d-c)^{s-\alpha_2-\frac{1}{r}} \times$$
$$\times \| D^{(s,s)}f\|_{L_r(I)}\, g_{\alpha_1,\alpha_2,m,s,z}(x, y).$$

Обчисливши норму обох частин попередньої нерівності в $L_q(I_e)$ і враховуючи (11), одержимо потрібну нерівність (9).

Виходячи з наслідку 1 і згідно з локальністю узагальненої кусково-ермітової інтерполяції, дамо оцінку похибки для прямокутника I, ректангульованого на $(N_1+1)(N_2+1)$ частин.

Теорема 3. *Нехай* $\pi=\pi_1\times\pi_2$ *деяке розбиття прямокутника* $I=[a,b]\times[c,d]$, $f\in K^{p,r}\times K^{p,r}(I)$, *де* $p\geqslant m$, *а* $L_{m\pi}$ — *узагальнена кусково-ермітова інтерполянта* f. *Тоді при* $s=\min(p,2m)$ *існує така постійна* K, *яка не залежить від* π_1 *і* π_2, *що*

$$\| D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f-L_{m\pi})\|_{L_q(I)}\leq K\bar{\pi}_1^{s-\alpha_1-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}\bar{\pi}_2^{s-\alpha_2-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}\| D^{(s,s)}f\|_{L_r(I)} \quad (14)$$

при $q\geqslant r$, $0\leq\alpha_1,\alpha_2\leq m-1$, *а також при* $0\leq\alpha_1,\alpha_2\leq m$, *якщо* $p>m$, *і*

$$\| D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f-L_{m\pi})\|_{L_q(I)}\leq K\bar{\pi}_1^{s-\alpha_1}\bar{\pi}_2^{s-\alpha_2}(b-a)^{\frac{r-q}{rq}}(d-c)^{\frac{r-q}{rq}}\| D^{(s,s)}f\|_{L_r(I)} \quad (14')$$

при $q\leq r$, $0\leq\alpha_1,\alpha_2\leq m$, *а також при* $0\leq\alpha_1,\alpha_2\leq m$, *якщо* $p>m$. *Тут* $\bar{\pi}_1=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant N_1}(x_{k+1}-x_k)$, $\bar{\pi}_2=\max\limits_{0\leqslant l\leqslant N_2}(y_{l+1}-y_l)$.

Доведення. З наведених вище положень ясно, що $D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f-L_{m\pi})\in L_q(I)$ при $0\leq\alpha_1,\alpha_2\leq m$ і $1\leq q\leq\infty$, якщо $p>m$. Якщо ж $p=m$, то $D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f-L_{m\pi})\in L_q(I)$ при $0\leq\alpha_1,\alpha_2\leq m$, а $1\leq q\leq r$ і $D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f-L_{m\pi})\in L_q(I)$ при $0\leq\alpha_1,\alpha_2\leq m-1$ і $r<q\leq\infty$. При цих обмеженнях на α_1, α_2 і q на кожному прямокутнику $[x_k,x_{k+1}]\times[y_l,y_{l+1}]$, $0\leq k\leq N_1$, $0\leq l\leq N_2$ означимо величини

$$v_{k,l}=\left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_l}^{y_{l+1}}|D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f-L_{m\pi})(t,z)|^q dtdz\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$w_{k,l}=\left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_l}^{y_{l+1}}|D^{(s,s)}f(t,z)|^r dtdz\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Із нерівності (9) маємо

$$v_{k,l}\leq K(x_{k+1}-x_k)^{s-\alpha_1-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}(y_{l+1}-y_l)^{s-\alpha_2-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}w_{k,l},$$
$$0\leq k\leq N_1,\quad 0\leq l\leq N_2. \quad (15)$$

Через те що $\bar{\pi}_1\geqslant x_{k+1}-x_k$, $\bar{\pi}_2\geqslant y_{l+1}-y_l$, з нерівності (15) одержуємо

$$\| D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f-L_{m\pi})\|_{L_q(I)}=\left(\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=0}^{N_2}v^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq K\bar{\pi}_1^{s-\alpha_1-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}\times$$
$$\times\bar{\pi}_2^{s-\alpha_2-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=0}^{N_2}w_{k,l}^q\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (16)$$

При $q\geqslant r$ із нерівності Ієнсена [6, с. 32] випливає, що

$$\left(\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=0}^{N_2}w_{k,l}^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\left(\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=0}^{N_2}w_{k,l}^r\right)^{\frac{1}{r}}=\| D^{(s,s)}f\|_{L_r(I)}. \quad (17)$$

Підставляючи нерівність (17) в (16), одержуємо потрібну нерівність (14).

Для того, щоб довести (14′), розглянемо випадок, коли $q=r$ в (14):

$$\| D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f-L_{m\pi})\|_{L_r(I)}\leq K\bar{\pi}_1^{s-\alpha_1}\bar{\pi}_2^{s-\alpha}\| D^{(s,s)}f\|_{L_r(I)}. \quad (18)$$

При $1 \leq q \leq r$ застосовуємо до лівої частини (18) нерівність Гельдера

$$\int_a^b \int_c^a |D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f - L_{m\pi})|^q dxdy \leq \left(\int_a^b \int_c^a |D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f - L_{m\pi})|^{q \cdot \frac{r}{q}} dxdy \right)^{\frac{q}{r}} \times$$

$$\times \left(\int_a^b \int_c^d 1^{\frac{r}{r-q}} dxdy \right)^{1-\frac{q}{r}} = \left(\int_a^b \int_c^d |D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f - L_{m\pi})|^r dxdy \right)^{\frac{q}{r}} (b-a)^{\frac{r-q}{r}} (d-c)^{\frac{r-q}{r}}.$$

Піднесемо обидві частини попередньої нерівності до степеня $\frac{1}{q}$, одержимо

$$\| D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f - L_{m\pi}) \|_{L_q(I)} \leq (b-a)^{\frac{r-q}{rq}} (d-c)^{\frac{r-q}{rq}} \| D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f - L_{m\pi}) \|_{L_r(I)}. \quad (19)$$

Підставивши (19) в (18), одержимо нерівність (14′).

Результати теореми 3 можна інтерпретувати в термінах соболєвських норм так.

Теорема 4. *Нехай $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ — деяке розбиття прямокутника I. Якщо $f(x, y) \in K^{p,r} \times K^{p,r}(I)$, де $p \geqslant m$, а $L_{m\pi}$ означає узагальнену кусково-ермітову інтерполянту f, тоді при $s = \min(p, 2m)$ існує така постійна K, незалежна від $\bar{\pi}_1$ і $\bar{\pi}_2$, що*

$$\| f - L_{m\pi} \|_{W_2^\alpha(I)} \leq K (\bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2)^{s-\alpha-\frac{1}{r}+\frac{1}{2}} \quad (20)$$

при $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \alpha \leq m-1$, а також при $\alpha = m$, якщо $p > m$, або $r = 2$ і

$$\| f - L_{m\pi} \|_{W_2^\alpha(I)} \leq K (b-a)^{\frac{r-2}{2r}} (d-c)^{\frac{r-2}{2r}} (\bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2)^{s-\alpha} \quad (21)$$

при $r \geqslant 2$, $0 \leq \alpha \leq m$.

В силу локальності узагальненої кусково-ермітової інтерполяції, результати теорем 3 і 4 справджуються для будь-яких прямокутних многокутників T, тобто для многокутників з сторонами, паралельними координатним осям.

Зауваження 1. Покажемо, як з інтерполяційної формули (2) можна одержати звичайні кусково-ермітові інтерполянти.

Кожну з функцій $D^{(i,0)}(x_k, y)$, і $D^{(0,j)}f(x, y_l)$ в формулі (2) проінтерполюємо за допомогою одновимірної формули Ерміта по вузлах y_l, $l = \overline{0, N_2+1}$ і x_k, $k = \overline{0, N_1+1}$ відповідно:

$$D^{(i,0)}f(x_k, y) \approx \sum_{l=0}^{N_2+1} \sum_{j=0}^{m-1} h_{l,j}(y) \frac{(y-y_l)^j}{j!} D^{(i,j)}f(x_k, y_l); \quad (22)$$

$$D^{(0,j)}f(x, y_l) \approx \sum_{k=0}^{N_1+1} \sum_{i=0}^{m-1} h_{k,i}(x) \frac{(x-x_k)^i}{i!} D^{(i,j)}f(x_k, y_l). \quad (23)$$

Підставляючи (22) і (23) в (2), одержуємо звичайну кусково-ермітову інтерполянту

$$L_{m\pi}(x, y) = \sum_{k,l=}^{N_1+1, N_2+1} \sum_{i,j=0}^{m-1} h_{k,i}(x) \frac{(x-x_k)^i}{i!} h_{l,j}(y) \frac{(y-y_l)^j}{j!} D^{(i,j)}f(x_k, y_l). \quad (24)$$

З а у в а ж е н н я 2. В роботі [4] одержана оцінка залишкового члена при застосуванні звичайної кусково-ермітової інтерполяції (24). Вона має такий вигляд:

$$\| D^{(\alpha_1,\alpha_2)} (f - L_{m\pi}) \|_{L_q(I)} \leq K\pi^{s-\max(\alpha_1,\alpha_2)}, \tag{25}$$

де $\pi = \max(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$, тобто має не менш ніж в 2 рази менший порядок по кроку розбиття π порівняно з запропонованою в даній роботі узагальненою кусково-ермітовою інтерполяцією, що показує ефективність застосування узагальненої кусково-ермітової інтерполяції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г л у ш к о О. Г., Л и т в и н О. М., П і д г о р н и й А. М., Ф е д ь к о В. В. Про формулу розкладу в околі паралелепіпеда в R^m.— Допов. АН УРСР, сер. А, 1974, № 1, с. 15—18.
2. G o r d o n W. J., H a l l C. A. Transfinite Element Methods: Blending — Function Interpolation over Arbitrary Curved Element Domains, Numer. Math., 1973, **21**.
3. M a r s h a l l J. A. and M i t c h e l l A. R. An Exact Boundary Technique for Improved Accuracy in the Element Method. J. Inst. Maths. Applics, 1973, **12**.
4. B i r k h o f f G., S c h u l t z M. H. and V a r g a R. S. Piecewise Hermit Interpolation in One and Two Variables with Applications to Partial Differential Equations, Numer. Math.. 1968, **11**.
5. C i a r l e t P. G., Schultz M. H. and Varga R. S. Numerical methods of highorder accuracy for nonlinear boundary value problems. I. One dimensional problem, Numer. Math., 1967, **9**.
6. Б а к к е н б а х Э., Б е л л м а н Р. Неравенства, М., «Мир», 1965.

Відділ водного господарства
промпідприємств ВНДІ ВодГео, Харків
Інститут проблем машинобудування АН УРСР

Надійшла до редакції
16.IV 1975 р.