УДК 517.946

Л. В. Любич

Про одну задачу теплопровідності, що має похідну по часу в граничній умові

При дослідженні проблем технічної теплофізики з'являється необхідність розв'язування мішаних задач з похідною по часу від шуканої функції в граничній умові.

1. Спочатку розглянемо задачу теплопровідності в тривимірному півпросторі $x_3 > 0$

$$a_0^2 \Delta_3 V = \frac{\partial V}{\partial t} \tag{1}$$

з такими граничними умовами:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{x_3=0;\,x_2<0} = 0, \quad V\,|_{x_3=0;\,x_2>0} = 0 \tag{2}$$

На лінії зіткнення цих умов $\{x_2 = 0, \ x_3 = 0\}$ функція $V(x, t)$ обмежена разом з $\frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$ і

$$\lim_{r \to 0} r \operatorname{grad} V = 0, \tag{3}$$

де $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$; $\lim\limits_{r^2 + x_1^2 \to \infty} V = 0$. В початковий момент часу

$$V\,|_{t=0} = \delta_{M(0;\,\xi_2;\,\xi_3)}, \ \ \xi_3 > 0. \tag{4}$$

Покажемо, що умови (2), (3), (4) визначають розв'язок (1) єдиним чином. Припустимо, що задача (1) — (4) має два незалежних розв'язки V_1, V_2. Позначимо $W = V_1 - V_2$. Очевидно, що W задовольняє (1) — (3) і $W|_{t=0} = 0$. Розглянемо об'ємний інтеграл

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \iiint W^2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \tag{5}$$

де інтегрування ведеться по всьому півпростору. Тоді

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = \iiint W \frac{\partial W}{\partial t} \, dx_1 \, dx_2 \, \partial x_3 = a_0^2 \iiint W \Delta_3 W \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

Застосовуючи формулу Гріна і вважаючи, що W задовольняє умови, достатні для того, щоб теорема Гріна була справедливою, одержимо

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = a_0^2 \iint_S W \frac{\partial W}{\partial n} \, ds - a_0^2 \iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_1 \, dx_2 \, dx_3. \tag{6}$$

Виділимо навколо лінії зіткнення граничних умов циліндр радіуса $r = \varepsilon$. У цьому випадку

$$\iint_S W \frac{\partial W}{\partial n} \, ds = \iint_{S_1} W \frac{\partial W}{\partial n} \, ds + \iint_{S_2} W \frac{\partial W}{\partial n} \, ds + \iint_{S_\varepsilon} W \frac{\partial W}{\partial n} \, ds, \tag{7}$$

де $S_1 = \{S \setminus S_\varepsilon, x_2 < -\varepsilon\}$, $S_2 = \{S \setminus S_\varepsilon, x_2 > \varepsilon\}$, а S_ε—бічна поверхня циліндра, визначена умовою $x_3 > 0$. Внаслідок виконання умов (2) на S перші два інтеграли справа в (7) дорівнюють нулю. Перейдемо в останньому інтегралі (7) до циліндричних координат

$$\iint_{S_\varepsilon} W \frac{\partial W}{\partial n} \, ds = - \iint_{S_\varepsilon} W \frac{\partial W}{\partial x_3} \varepsilon ds'.$$

Оскільки при $\varepsilon \to 0$ $x_2 \to 0$, $x_3 \to 0$, то є можливість використати умову (3), і одержуємо

$$\iint_{S_\varepsilon} W \varepsilon \frac{\partial W}{\partial x_3} ds' \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

Отже,

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = - a_0^2 \iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \leq 0 \tag{8}$$

$$\text{і } W = 0, \ V_1 = V_2.$$

Перейдемо до знаходження розв'язку задачі (1), (2), (4). При цьому будемо використовувати інтегральні перетворення А. Ф. Шестопала на ріманових многовидах. Поряд з декартовими координатами, введемо і циліндричні координати таким чином:

$$(x_1, \ x_2 = r \cos \varphi, \ x_3 = r \sin \varphi), \ \ M(0, \rho, \varphi_0).$$

Нехай $\mathfrak{R}_2$ — дволиста ріманова поверхня функції $\sqrt{z}$, причому $\varphi = \varphi (\mathrm{mod}\, 4\pi)$. Для розв'язування поставленої задачі знайдемо функцію U, яка визначена на рімановому многовиді $\Re_2 \times E_1 \times (0, \infty)$ і задовольняє (1), (3), (4). Застосовуючи до U $\widetilde{S}$-перетворення з [1] по двох змінних і перетворення Лапласа по t, одержимо

$$\frac{\partial^2 \widetilde{S}_{LU}}{\partial x_1^2} - \left(\lambda^2 + \frac{p}{a_0^2}\right)\widetilde{S}_{LU} = -\frac{\Phi_2(\lambda, R, \varphi - \varphi_0)}{2\pi a_0^2}\,\delta(x_1), \tag{9}$$

де Φ_2 — ядро інтегрального перетворення

$$\Phi_2(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \frac{\sin(\lambda\sqrt{R^2 + W^2})}{\sqrt{R^2 + w^2}}\,dw$$

і

$$R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Регулярним на нескінченності розв'язком рівняння (9) буде функція

$$\widetilde{S}_{LU} = \frac{\Phi_2(\lambda, R, \varphi - \varphi_0)}{4\pi a_0\sqrt{\lambda^2 a_0^2 + 1}}\exp\left[-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p}{a_0^2}}\,|x_1|\right]. \tag{10}$$

Використовуючи формулу оберненого перетворення (1.22) з [1] і обернене перетворення Лапласа, маємо

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{16\pi^2 a_0^4 t^2}\int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4a_0^2 t}(x_1^2 + R^2 + w^2)\right]dw = \\ &= \frac{1}{16a_0^3\sqrt{\pi^3 t^3}}\exp\left\{-\frac{1}{4a_0^2 t}\left[x_1^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \varphi_0)\right]\right\} \times \\ &\times\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{a_0\sqrt{t}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Розв'язок задачі (1) — (4) будуємо, виходячи з (11), методом відбиття з переходом в другий лист ріманової поверхні $\Re_2$.

$$\begin{aligned} V = U(x_1, r, \rho, \varphi - \varphi_0\, t) - U(x_1, r, \rho, \varphi + \varphi_0 - 2\pi, t) - \\ - U(x_1, r, \rho, \varphi - \varphi_0 - 2\pi, t) + U(x_1, r, \rho, \varphi + \varphi_0 - 4\pi, t). \end{aligned} \tag{12}$$

2. Розглянемо задачу теплопровідності (1), (3), (4) в півпросторі $x_3 > 0$, коли на його поверхні задаються такі граничні умови:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{x_3=0, x<0} = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial n} + a_1^2\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{x_3=0, x_2>0} = 0. \tag{13}$$

Покажемо єдиність розв'язку цієї задачі. Аналогічним шляхом, як і в п. 1, приходимо до рівняння

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a_0^2\iint\limits_S W\frac{\partial W}{\partial n}\,ds - a_0^2\iiint\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)^2\right]dx_1\,dx_2\,dx_3$$

і (14)

$$a_0^2 \iint\limits_S W \frac{\partial W}{\partial n} ds = a_0^2 \iint\limits_{S_1} W \frac{\partial W}{\partial n} ds + a_0^2 \iint\limits_{S_\varepsilon} W \frac{\partial W}{\partial n} ds + a_0^2 \iint\limits_{S_2} W \frac{\partial W}{\partial n} ds.$$

Враховуючи умову (3) і першу умову з (13), маємо

$$a_0^2 \iint\limits_{S_1} W \frac{\partial W}{\partial n} ds - a_0^2 \iint\limits_{S_\varepsilon} W \frac{\partial W}{\partial x_3} \varepsilon\, ds' = 0,$$

$$a_0^2 \iint\limits_{S_2} W \frac{\partial W}{\partial n} ds = - a_0^2 a_1^2 \iint\limits_{S_2} W \frac{\partial W}{\partial t} ds = - \frac{a_0^2 a_1^2}{2} \iint\limits_{S_2} \frac{\partial (W^2)}{\partial t} ds = - a_0^2 a_1^2 \frac{\partial \mathfrak{J}_2}{\partial t}, \tag{15}$$

де $\mathfrak{J}_2 = \frac{1}{2} \iint\limits_{S_2} W^2 ds \geqslant 0$ і $\mathfrak{J}_2 |_{t=0} = 0$. З (14) маємо

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = - a_0^2 a_1^2 \frac{\partial \mathfrak{J}_2}{\partial t} - a_0^2 \iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{J} + a_0^2 a_1^2 \mathfrak{J}_2) = - a_0^2 \iiint \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_1\, dx_2\, dx_3 \leqslant 0.$$

В силу (5), (15)

$$\mathfrak{J} + a_0^2 a_1^2 \mathfrak{J}_2 \leqslant 0 \text{ і } \mathfrak{J} \leqslant - a_0^2 a_1^2 \mathfrak{J}_2 \leqslant 0.$$

Звідси випливає, що $W = V_1 - V_2 = 0$.

Розв'язок задачі (1), (3), (4), (13) також будуємо виходячи з (11) методом відбиття на рімановому многовиді $\mathfrak{R}_2 \times E_1 \times (0, \infty)$:

$$\begin{aligned} V = {} & U(x_1, r, \rho, \varphi - \varphi_0, t) + U(x_1, r, \rho, \varphi + \varphi_0 - 2\pi, t) + \\ & + U(x_1, r, \rho, \varphi - \varphi_0 - 2\pi, t) + U(x_1, r, \rho, \varphi + \varphi_0 - 4\pi, t) - \\ & - 2a_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_\infty^0 U(x_1, r', \rho, \varphi' - 2\pi + \varphi_0, t + a_1^2 m)\, dm - \\ & - 2a_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_\infty^0 U(x_1, r', \rho, \varphi' - \varphi_0 - 2\pi, t + a_1^2 m)\, dm, \end{aligned} \tag{16}$$

де $r'^2 = x_2^2 + (x_3 + m)^2$, $\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{x_3 + m}{x_2}$.

Покажемо, що одержана функція задовольняє умови на межі півпростору. Очевидно, що

$$\frac{\partial}{\partial n} [U(\varphi - \varphi_0) + U(\varphi + \varphi_0 - 2\pi) + U(\varphi - \varphi_0 - 2\pi) + U(\varphi + \varphi_0 - 4\pi)] |_{x_3=0} = 0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [U(\varphi - \varphi_0, t) + U(\varphi + \varphi_0 - 2\pi, t)] \Big|_{\substack{x_3=0 \\ x_2>0}} = 2 \frac{\partial U(-\varphi_0)}{\partial t}; \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [U(\varphi - \varphi_0 - 2\pi, t) + U(\varphi + \varphi_0 - 4\pi, t)] \Big|_{\substack{x_3=0 \\ x_2>0}} = 2 \frac{\partial U(\varphi_0)}{\partial t}. \tag{19}$$

Далі, застосовуючи до двох останніх членів (16) граничний оператор (13), приходимо до такого:

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial n}+a_1^2\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[-2a_1^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\infty}^{0}U(\varphi'-2\pi+\varphi_0,\ t+a_1^2m)\,dm\right]\right\}\Bigg|_{\substack{x_3=0\\ x_2>0}}=$$

$$=\left[-2a_1^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\infty}^{0}\frac{\partial U(\varphi'-2\pi+\varphi_0,\ t+a_1^2m)}{\partial m}\,dm\right]\Bigg|_{\substack{x_3=0\\ x_2>0}}=-2a_1^2\frac{\partial U(\varphi_0)}{\partial t}; \tag{20}$$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial n}+a_1^2\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[-2a_1^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\infty}^{0}U(\varphi'-\varphi_0-2\pi,\ t+a_1^2m)\,dm\right]\right\}\Bigg|_{\substack{x_3=0\\ x_2>0}}=$$

$$=\left[-2a_1^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\infty}^{0}\frac{\partial U(\varphi'-\varphi_0-2\pi,\ t+a_1^2m)}{\partial m}\,dm\right]_{\substack{x_3=0\\ x_2>0}}=-2a_1^2\frac{\partial U(-\varphi_0)}{\partial t}. \tag{21}$$

З (17)—(21) випливає, що вираз (16) задовольняє задані граничні умови.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шестопал А. Ф. Интегральные преобразования с неразделенными переменными. Препринт Ин-та математики АН УССР, 73.6, К., 1973, 46 с.
2. Митропольский Ю. А., Нижник Л. П., Кульчицкий В. Л. Нелинейные задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии. Препринт Ин-та математики АН УССР, 74.15, К., 1974, 31 с.

Інститут математики АН УРСР

Надійшла до редакції 18.VI 1975 р.