УДК 517.9

Нгуєн Кхак Лан

Дослідження коливань системи з імпульсною дією, повільно змінними параметрами та з запізненням

1. Системи з імпульсною дією, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, досліджувалися в роботах [1—4] та ін. У цій замітці розглядаються коливальні процеси, які описуються диференціальними рівняннями з запізненням аргументу такого вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(y, x) = \varepsilon\left[f_1\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right)\delta(x - x_0) + F_1\left(y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt}\right)\right],$$
$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F_2\left(y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt}\right). \tag{1.1}$$

Тут і далі позначаємо $y_\Delta = y(t - \Delta)$, $x_\Delta = x(t - \Delta)$, де ε — малий додатний параметр, $\Delta = \Delta(y)$ характеризує запізнення, $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака, що визначається співвідношеннями

$$\int_{-0}^{+0} \delta(x)\,dx = 1, \tag{1.2}$$
$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Побудуємо розв'язок системи (1.1). Для цього, припустимо, що вона задовольняє такі умови:

1) Функції $F_j\left(y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt}\right) (j = 1, 2)$ є поліномами змінних y, y_Δ, x, x_Δ, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx_\Delta}{dt}$.

2) Розв'язок незбуреного рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(y, x) = 0, \tag{1.3}$$

де $y = \text{const}$, має вигляд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a^n z_n(y, \psi), \tag{1.4}$$

де $z_n(y, \psi)$ — періодичні щодо ψ з періодом 2π функції і $z_n(y, \psi)$ обмежені при всіх ψ, $y \in Y$:

$$\psi = \omega(y, a)(t + h), \tag{1.5}$$

a — мала довільна стала, h — довільна стала, причому ряд (1.4) рівномірно збігається.

Позначимо через $z(y, a, \psi)$ наближений розв'язок рівняння (1.3), тобто

$$z(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^{k} a^n z_n(y, \psi), \tag{1.6}$$

де $z_n(y, \psi)$ — суми тригонометричних функцій.

Здійснивши в системі (1.1) заміну змінних

$$\begin{aligned} x &= z(y, a, \psi), \\ \frac{dx}{dt} &= \omega(y, a) z'_\psi(y, a, \psi), \\ y &= y, \ \ \psi = \int \omega(y, a)\, dt + \varphi, \end{aligned} \tag{1.7}$$

де a, φ — нові змінні, замість системи рівнянь (1.1), одержимо систему рівнянь в стандартній формі при умові $|a|^k \approx \varepsilon^2$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{D}\{[\omega z'_y z''_{\psi^2} - (\omega z'_\psi)'_y z'_\psi] F_2(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta}) + \\ &+ [f_1(y, z, \omega z'_\psi)\delta(z - x_0) + F_1(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta})] z'_\psi\} + 0(\varepsilon^2), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varepsilon}{D}\{[(\omega z'_\psi)'_a z'_y - (\omega z'_\psi)'_y z'_a] F_2(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta}) + \\ &+ [f_1(y, z, \omega z'_\psi)\delta(z - x_0) + F_1(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta})] z'_a\} + 0(\varepsilon^2), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon F_2(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta}) + 0(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{1.8}$$

де $D = \omega z'_a z''_{\psi^2} - (\omega z'_\psi)'_a z'_\psi$ не залежить від ψ [1],

$$z_\Delta = z(y(t - \Delta), a(t - \Delta), \psi(t - \Delta)), \ \ z'_{\psi\Delta} = z'_\psi(y(t-\Delta), a(t-\Delta), \psi(t-\Delta)).$$

Використовуючи властивості дельта-функції, перетворимо рівняння (1.8) в такі:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{D}\sum_{j=1}^{2r} f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_j))\, z'_\psi(y, a, \psi_j)\,\delta(z(y, a, \psi) - x_0) -$$

$$-\frac{\varepsilon}{D}\{[\omega z'_y z''_{\psi^2} - (\omega z'_\psi)'_y z'_\psi]\, F_2 + F_1 z'_\psi\},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{D}\sum_{j=1}^{2r} f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_j))\, z'_a(y, a, \psi_j)\,\delta(z(y, a, \psi) - x_0) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{D}\{[(\omega z'_\psi)'_a z'_y - (\omega z'_\psi)'_y z'_a]\, F_2 + F_1 z'_a\}, \tag{1.9}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F_2(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta}),$$

де ψ_j корені рівняння

$$z(y, a, \psi) = x_0. \tag{1.10}$$

Наведомо тепер методику визначення значень $z'_\psi(y, a, \psi_j)$ та $z'_a(y, a, \psi_j)$. Для цього припустимо, що розв'язок $z(y, a, \psi)$ є парною функцією змінної ψ, тобто

$$z(y, a, -\psi) = z(y, a, \psi). \tag{1.11}$$

При цьому допущенні відрізок ряду Фур'є розв'язку (1.6) незбуреного рівняння прийме вигляд

$$z(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^{m} A_n(y, a)\cos n\psi. \tag{1.12}$$

Диференціюючи (1.12) по ψ, одержуємо

$$z'_\psi(y, a, \psi) = -\sum_{n=1}^{m} nA_n(y, a)\sin n\psi. \tag{1.13}$$

Використовуючи властивості тригонометричних функцій, суму (1.12) можна переписати у вигляді полінома відносно

$$z(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^{m} B_n(y, a)\cos^n\psi \tag{1.14}$$

і суму (1.13) так:

$$z'_\psi(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^{m} c_n(y, a)\sin^n\psi. \tag{1.15}$$

Отже, рівняння (1.10) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{m} B_n(y, a)\cos^n\psi = x_0. \tag{1.16}$$

Рівняння (1.16) є рівнянням m-го степеня щодо $\cos\psi$ і якщо m невелике, то його можна легко розв'язати. Позначаючи його корені через ξ_i, одержуємо

$$\cos\varphi_i = \xi_i, \tag{1.17}$$

тому

$$z'_\psi(y, a, \psi_i) = \sum_{n=1}^{m} c_n(y, a)(1 - \xi_i^2)^{n/2}, \tag{1.18}$$

$$z'_a(y, a, \psi_i) = \sum_{n=1}^{m} B'_{na}(y, a)\,\xi_i^n. \tag{1.19}$$

Якщо для кожного i $\psi_i^{(1)}$ та $\psi_i^{(2)}$ — корені рівняння (1.17), то коренями цього рівняння будуть також $\psi_i^{(1)} + 2k\pi$ та $\psi_i^{(2)} + 2k\pi$, де $i = 1, 2, \ldots, r$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Для визначеності далі будемо вважати, що $x > 0$ і $z(y, a, \psi)$ знакозмінна.

Оскільки функція $\delta(z(y, a, \psi) - x_0)$ може бути відмінною від нуля лише при

$$\max_{0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi} z(y, a, \psi) \geqslant x_0, \tag{1.20}$$

то при $\max z(y, a, \psi) < x_0$ миттьова сила не впливає на систему (1.1) і остання перетворюється в систему, що розглядалася в роботі [5]. Тому, щоб розглядати системи, що знаходяться під впливом миттьових сил, будемо припускати здійснення нерівності (1.20).

Позначаючи через $\varepsilon\Phi_1(y, a, \psi)$, $\varepsilon\Phi_2(y, a, \psi)$, $\varepsilon\Phi_3(y, a, \psi)$ відповідно другі доданки двох перших рівнянь і праву частину третього рівняння системи (1.9) і застосовуючи до системи (1.9) метод усереднення, (див. [1, 3, 6]), одержуємо рівняння першого наближення:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi D}\sum_{i=1}^{r}\{f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)}))\operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) +$$

$$+ f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)}))\operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)}))\} + \varepsilon\Phi_{10}(y, a),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi D}\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)}))\, z'_a(y, a, \psi_i^{(1)})}{|z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})|} +\right.$$

$$\left. + \frac{f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)}))\, z'_a(y, a, \psi_i^{(2)})}{|z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})|}\right\} + \varepsilon\Phi_{20}(y, a), \tag{1.21}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\Phi_{30}(y, a),$$

в яких $\Phi_{10}(y, a)$, $\Phi_{20}(y, a)$ та $\Phi_{30}(y, a)$ є середніми значеннями щодо ψ функцій $\Phi_1(y, a, \psi)$, $\Phi_2(y, a, \psi)$ та $\Phi_3(y, a, \psi)$.

Рівняння першого наближення дають усереднену картину коливань із запізненням, але не виявляють явищ, які виникають через наявність миттьових імпульсів. Для виявлення цих явищ необхідно розглядати, в крайньому випадку, покращене 1-ше наближення. Для визначення розв'язку в покращеному 1-му наближенні враховуємо всі «осцилюючі» члени в правих частинах рівнянь (1.9). Після деяких обчислень одержуємо

$$a_1 = a - \frac{\varepsilon}{\pi D}\left\{\sum_{i=1}^{r} f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)}))\operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)}))\times\right.$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\psi - \psi_i^{(1)})}{k\omega} + \sum_{i=1}^{r} f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\psi - \psi_i^{(2)})}{k\omega} \Bigg\} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k} \sin k\psi - B_{1k} \cos k\psi}{k\omega},$$

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\varepsilon}{\pi D} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{r} \frac{f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) z'_a(y, a, \psi_i^{(1)})}{|z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\psi - \psi_i^{(1)})}{k\omega} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \frac{f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) z'_a(y, a, \psi_i^{(2)})}{|z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\psi - \psi_i^{(2)})}{k\omega} \Bigg\} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k} \sin k\psi - B_{2k} \cos k\psi}{k\omega}, \tag{1.22}$$

$$y_1 = y + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{3k} \sin k\psi - B_{3k} \cos k\psi}{k\omega},$$

де A_{ik}, B_{ik} $(i = 1, 2, 3)$ — коефіцієнти Фур'є функцій $\Phi_i(y, a, \psi)$; величини a, φ, y визначаються рівняннями (1.21).

Приклад. Розглянемо коливну систему, що описується рівняннями

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) - \alpha y x^3(t) = \varepsilon \left[x^2(t) \frac{dx(t)}{dt} \delta(x - x_0) + y x^3(t - \Delta) \right], \tag{1.23}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon h x(t - \Delta),$$

де $\Delta = \text{const}$. При $\varepsilon = 0$ наближений розв'язок системи (1.23) має вигляд

$$x = z(y, a, \psi) = a \cos \psi + \frac{\alpha y a^3}{32} (\cos \psi - \cos 3\psi),$$

$$\psi = \omega(y, a) t + \varphi, \qquad \omega(y, a) = \frac{1}{1 + \frac{3\alpha y}{8} a^2}. \tag{1.24}$$

Якщо позначимо

$$\xi = \cos \psi, \qquad p = -\frac{8 + \alpha y a^2}{\alpha y a^2}, \qquad q = \frac{8x_0}{\alpha y a^3},$$

то рівняння (1.16) можна переписати так:

$$\xi^3 + p\xi + q = 0. \tag{1.25}$$

У випадку, коли $a > 0$ і $-\frac{8}{\alpha a^2} < y < -\sigma < 0$, рівняння (1.25) має один дійсний корінь

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}},$$

звідки $\psi_{1,2} = \pm \arccos \xi + 2k\pi$.

Припустимо, що $0 < \arccos \xi < \frac{\pi}{2}$. Повторюючи міркування, наведені вище, одержуємо усереднені рівняння

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon\omega x_0^2 a}{\pi D}(1-\xi^2)^{1/2}\left(1+\frac{\alpha y a^2}{4}-\frac{3\alpha y a^2}{8}\xi^2\right)\operatorname{sign} a + \frac{\varepsilon 3 y a^4}{8D}\sin\omega\Delta,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon\omega x_0^2 \xi}{\pi D}\left[1+\frac{3\alpha y a^2}{8}(1-\xi^2)\right]\operatorname{sign} a + \frac{\varepsilon 3 y a^3}{8D}\cos\omega\Delta,$$

де $y = \mathrm{const}$ і якщо $-\frac{8}{\alpha a^2} < y < -\sigma < 0$, $D = -a\omega(1-\alpha y a^2)$.

2. Подамо тепер обгрунтування викладеної вище методики. Змінна a в формулах заміни (1.17) повинна бути малою, тому для правильності цієї заміни необхідно довести, що розв'язок $a(t)$ рівнянь (1.21) залишається малим в деякому інтервалі часу, оскільки згідно з результатами праць [3, 6] $a(t)$ з системи (1.9) близьке до рівнянь (1.21).

Теорема. *Якщо* 1) $F_j\left(y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt}\right)$ $(j=1,2)$ *і* $f_1\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right) = I\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right)\left|\frac{dx}{dt}\right|$ *системи* (1.1) *є поліномами своїх змінних, причому*

$$|F_1(y, y_\Delta, 0, 0, 0, 0)| < \delta \ll 1, \tag{2.1}$$

$$|I(y, x_0, 0)| < \delta_1 \ll 1, \tag{2.2}$$

$\delta_1 \ll 1$ *настільки, щоб*

$$\left|\delta_1 \frac{z'_{1\psi}}{A(y,a)}\right| \ll 1, \qquad \left|\delta_1\omega \frac{z'_{1\psi}}{A(y,a)}\right| \ll 1. \tag{2.3}$$

2) *Наближений розв'язок незбуреного рівняння має вигляд*

$$x = z(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^{k} a^n z_n(y, \psi) \tag{2.4}$$

і

$$D(y, a) = \omega z'_a z''_{\psi^2} - (\omega z'_\psi)'_a z'_\psi = aA(y, a), \tag{2.5}$$

де функція $A(y, a)$ *відмінна від нуля, тоді розв'язок* $a(t)$ *системи* (1.21) *рівномірно обмежений достатньо малим числом на інтервалі* $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$, *якщо початкове значення* $a(0)$ — *мале.*

Доведення. Позначимо праву частину першого рівняння системи (1.21) через $\varepsilon\pi(y, a)$ і будемо писати її у вигляді

$$\varepsilon\pi(y, a) = \varepsilon[\Phi_{10}(y, a) + Q(y, a)]. \tag{2.6}$$

Оскільки функція F_1 є поліномом від змінних $y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt}$ і $x = z(y, a, \psi)$ також є поліномом від a, то функції F_1 і $F_1 z'_\psi$ є поліномами від a, коефіцієнти яких залежать від y, ψ. Зобразимо функцію F_1 у вигляді суми

$$F_1 = F_1^*(y, a, \psi) + F_1^{**}(y), \tag{2.7}$$

де $F_1^*(y, 0, \psi) = 0$, і

$$|F_1^{**}(y)| = |F_1(y, y_\Delta, 0, 0, 0, 0)| < \delta \ll 1. \tag{2.8}$$

Отже,

$$\Phi_1(y, a, \psi) = -F_1^{**}(y)\frac{z'_{1\psi}(y, \psi)}{A(y, a)} - \frac{1}{D(y, a)}\left\{F_1^{**}(y)\sum_{n=2}^{k} a^n z'_{n\psi}(y, \psi) + \right.$$

$$\left. + F_1^{*}(y, a, \psi)\, z'_{\psi} + [\omega z'_y z''_{\psi_2} - (\omega z'_{\psi})'_y z'_{\psi}]F_2\right\} = -F_1^{**}(y)\frac{z'_{1\psi}(y, \psi)}{A(y, a)} + aB(y, a, \psi). \tag{2.9}$$

Із (2.3), (2.8) і припущення теореми випливає, що

$$\left| F_1^{**}(y)\frac{z'_{1\psi}(y, \psi)}{A(y, a)}\right| \ll 1$$

і $B(y, a, \psi)$ обмежена функція. Тому

$$|\Phi_{10}(y, a)| < c'a + c'_1, \tag{2.10}$$

де c'_1 досить мала, c' — обмежена.

Зобразимо $I\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right)$ у вигляді суми

$$I = I(y, x_0) + I_1(y, a, \psi_i^{(j)}, x_0), \tag{2.11}$$

де $I_1(y, 0, \psi_i^{(j)}, x_0) = 0$, розглянемо вираз

$$Q(y, a) = -\frac{1}{2\pi D}\sum_{i=1}^{r}\{f_1(y, x_0, \omega z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(1)}))\, \mathrm{sign}\,(z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(1)})) +$$

$$+ f_1(y, x_0, \omega z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(2)}))\, \mathrm{sign}\,(z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(2)}))\} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{I(y, x_0)\,\omega z'_{1\psi}(y, \psi_i^{(1)})}{A(y, a)}\, \mathrm{sign}\,(z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(1)})) + \right.$$

$$+ \frac{I(y, x_0)\,\omega z'_{1\psi}(y, \psi_i^{(2)})}{A(y, a)}\, \mathrm{sign}\,(z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(2)})) + \left[\frac{I(y, x_0)\,\omega}{D(y, a)}\sum_{n=2}^{k} a^n z'_{n\psi}(y, \psi_i^{(1)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{I_1(y, a, \psi_i^{(1)}, x_0)\,\omega}{D(y, a)} z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(1)})\right]\mathrm{sign}\,(z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(1)})) +$$

$$+ \left[\frac{I(y, x_0)\,\omega}{D(y, a)}\sum_{n=2}^{k} a^n z'_{n\psi}(y, \psi_i^{(2)}) + \frac{I_1(y, a, \psi_i^{(2)}, x_0)\,\omega}{D(y, a)} z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(2)})\right] \times$$

$$\left. \times\, \mathrm{sign}\,(z'_{\psi}(y, a, \psi_i^{(2)}))\right\} = aQ_1(x_0, a, y) + Q_2(x_0, a, y).$$

Враховуючи (2.2), (2.3), (2.11), маємо, що $|Q_1(x_0, a, y)|$ обмежена $|Q_2(x_0, a, y)| \ll 1$.

Із (2.10) та (2.12) маємо

$$|\pi(y, a)| \leqslant ac + c_1, \tag{2.13}$$

де c_1 — досить мала, при $0 \leqslant a \leqslant A$, $|y| \leqslant Y$.

Покажемо тепер, що розв'язок $a(t)$ системи (1.21) обмежений досить малим числом M.

З першого рівняння системи (1.21) та умови (2.13) маємо нерівність

$$\frac{da}{dt} \leqslant \varepsilon ca + \varepsilon c_1. \tag{2.14}$$

Вказане твердження справедливе, оскільки розв'язок (2.14) обмежений таким чином: $a \leqslant a_0 e^{\varepsilon ct} + \frac{c_1}{c}(e^{\varepsilon ct} - 1)$ і якщо a_0 досить мале, $c_1 \ll c$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$, то $|a| \leqslant M$.

Згідно з теоремою розв'язок $a(t)$ рівнянь (1.21) обмежений малою сталою, якщо початкові умови досить малі. Підставляючи розв'язки рівнянь (1.21) в (2.3), одержуємо ряд, збіжний при $k \to \infty$, а це означає, що метод побудови розв'язку вірний.

Зауваження. Вказану вище методику можна застосовувати і для розв'язування неавтономної системи в резонансному випадку, тобто, коли функції S_1, F_2 в рівняннях (1.1) залежать явно від часу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А. Методы усреднения в нелинейной механике. К., «Наук. думка», 1971, 440 с.
2. Самойленко А. М. Применения метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром.— УМЖ, 1961, **13**, № 3, с. 103—109.
3. Самойленко А. М. Исследование дифференциального уравнения с «нерегулярной» правой частью. III Konferenz über nichtlineare schwingugen. Akademic — berlag. Berlin, 1965.
4. Самойленко А. М. Метод уравнения в системах с толчками.— Мат. физика, 1971, вып. 9, с. 101—117.
5. Нгуен Кхак Лан. Исследование колебаний в нелинейных системах с медленно меняющимися параметрами и с запаздыванием.— В кн.: Аналитические методы теории дифференциальных уравнений. К., изд. Ин-та математики АН УССР, 1977. (В печати.)
6. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., «Наука», 1969, 287 с.

Інститут математики АН УРСР

Надійшла до редакції
18.XI 1975 р.