

### Дослідження коливань системи з імпульсною дією, повільно змінними параметрами та з запізненням

1. Системи з імпульсною дією, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, досліджувалися в роботах [1—4] та ін. У цій замітці розглядаються коливальні процеси, які описуються диференціальними рівняннями з запізненням аргументу такого вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(y, x) = \varepsilon \left[ f_1 \left( y, x, \frac{dx}{dt} \right) \delta(x - x_0) + F_1 \left( y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt} \right) \right], \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F_2 \left( y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt} \right).$$

Тут і далі позначаємо  $y_\Delta = y(t - \Delta)$ ,  $x_\Delta = x(t - \Delta)$ , де  $\varepsilon$  — малий додатний параметр,  $\Delta = \Delta(y)$  характеризує запізнення,  $\delta(x)$  — дельта-функція Дірака, що визначається співвідношеннями

$$\int_{-0}^{+0} \delta(x) dx = 1, \quad (1.2)$$

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Побудуємо розв'язок системи (1.1). Для цього, припустимо, що вона задовольняє такі умови:

1) Функції  $F_j \left( y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt} \right) (j = 1, 2)$  є поліномами змінних  $y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt}$ .

2) Розв'язок незбуреного рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(y, x) = 0, \quad (1.3)$$

де  $y = \text{const}$ , має вигляд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a^n z_n(y, \psi), \quad (1.4)$$

де  $z_n(y, \psi)$  — періодичні щодо  $\psi$  з періодом  $2\pi$  функції і  $z_n(y, \psi)$  обмежені при всіх  $\psi, y \in Y$ :

$$\psi = \omega(y, a)(t + h), \quad (1.5)$$

$a$  — мала довільна стала,  $h$  — довільна стала, причому ряд (1.4) рівномірно збігається.

Позначимо через  $z(y, a, \psi)$  наближений розв'язок рівняння (1.3), тобто

$$z(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^k a^n z_n(y, \psi), \quad (1.6)$$

де  $z_n(y, \psi)$  — суми тригонометричних функцій.

Здійснивши в системі (1.1) заміну змінних

$$x = z(y, a, \psi),$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega(y, a) z'_\psi(y, a, \psi),$$

$$y = y, \quad \psi = \int \omega(y, a) dt + \varphi, \quad (1.7)$$

де  $a, \varphi$  — нові змінні, замість системи рівнянь (1.1), одержимо систему рівнянь в стандартній формі при умові  $|a|^k \approx \varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & -\frac{\varepsilon}{D} \{ [\omega z'_y z''_{\psi^2} - (\omega z'_\psi)'_y z'_\psi] F_2(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta}) + \\ & + [f_1(y, z, \omega z'_\psi) \delta(z - x_0) + F_1(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta})] z'_\psi \} + 0(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & \frac{\varepsilon}{D} \{ [(\omega z'_\psi)'_a z'_y - (\omega z'_\psi)'_y z'_a] F_2(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta}) + \\ & + [f_1(y, z, \omega z'_\psi) \delta(z - x_0) + F_1(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta})] z'_a \} + 0(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F_2(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_{\psi\Delta}) + 0(\varepsilon^2),$$

де  $D = \omega z'_a z''_{\psi^2} - (\omega z'_\psi)'_a z'_\psi$  не залежить від  $\psi$  [1],

$$z_\Delta = z(y(t - \Delta), a(t - \Delta), \psi(t - \Delta)), \quad z'_{\psi\Delta} = z'_\psi(y(t - \Delta), a(t - \Delta), \psi(t - \Delta)).$$

Використовуючи властивості дельта-функції, перетворимо рівняння (1.8) в такі:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{D} \sum_{j=1}^{2r} f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_j)) z'_\psi(y, a, \psi_j) \delta(z(y, a, \psi) - x_0) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{D} \{[\omega z'_y z'_\psi] - (\omega z'_\psi)'_y z'_\psi\} F_2 + F_1 z'_\psi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varepsilon}{D} \sum_{j=1}^{2r} f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_j)) z'_a(y, a, \psi_j) \delta(z(y, a, \psi) - x_0) + \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{D} \{[(\omega z'_\psi)'_a z'_y - (\omega z'_\psi)'_y z'_a]\} F_2 + F_1 z'_a, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon F_2(y, y_\Delta, z, z_\Delta, \omega z'_\psi, \omega z'_\psi \Delta), \end{aligned} \quad (1.9)$$

де  $\psi_j$  корені рівняння

$$z(y, a, \psi) = x_0. \quad (1.10)$$

Наведено тепер методику визначення значень  $z'_\psi(y, a, \psi_j)$  та  $z'_a(y, a, \psi_j)$ . Для цього припустимо, що розв'язок  $z(y, a, \psi)$  є парною функцією змінної  $\psi$ , тобто

$$z(y, a, -\psi) = z(y, a, \psi). \quad (1.11)$$

При цьому допущенні відрізок ряду Фур'є розв'язку (1.6) незбуреного рівняння прийме вигляд

$$z(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^m A_n(y, a) \cos n\psi. \quad (1.12)$$

Диференціюючи (1.12) по  $\psi$ , одержуємо

$$z'_\psi(y, a, \psi) = -\sum_{n=1}^m n A_n(y, a) \sin n\psi. \quad (1.13)$$

Використовуючи властивості тригонометричних функцій, суму (1.12) можна переписати у вигляді полінома відносно

$$z(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^m B_n(y, a) \cos^n \psi \quad (1.14)$$

і суму (1.13) так:

$$z'_\psi(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^m c_n(y, a) \sin^n \psi. \quad (1.15)$$

Отже, рівняння (1.10) має вигляд

$$\sum_{n=1}^m B_n(y, a) \cos^n \psi = x_0. \quad (1.16)$$

Рівняння (1.16) є рівнянням  $m$ -го степеня щодо  $\cos \psi$  і якщо  $m$  невелике, то його можна легко розв'язати. Позначаючи його корені через  $\xi_i$ , одержуємо

$$\cos \varphi_i = \xi_i, \quad (1.17)$$

тому

$$z'_\psi(y, a, \psi_i) = \sum_{n=1}^m c_n(y, a) (1 - \xi_i^2)^{n/2}, \quad (1.18)$$

$$z'_a(y, a, \psi_i) = \sum_{n=1}^m B'_{na}(y, a) \xi_i^n. \quad (1.19)$$

Якщо для кожного  $i$   $\psi_i^{(1)}$  та  $\psi_i^{(2)}$  — корені рівняння (1.17), то коренями цього рівняння будуть також  $\psi_i^{(1)} + 2k\pi$  та  $\psi_i^{(2)} + 2k\pi$ , де  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Для визначеності далі будемо вважати, що  $x > 0$  і  $z(y, a, \psi)$  знакозмінна.

Оскільки функція  $\delta(z(y, a, \psi) - x_0)$  може бути відмінною від нуля лише при

$$\max_{0 \leq \psi < 2\pi} z(y, a, \psi) \geq x_0, \quad (1.20)$$

то при  $\max z(y, a, \psi) < x_0$  миттєва сила не впливає на систему (1.1) і остання перетворюється в систему, що розглядалася в роботі [5]. Тому, щоб розглядати системи, що знаходяться під впливом миттєвих сил, будемо припускати здійснення нерівності (1.20).

Позначаючи через  $\varepsilon\Phi_1(y, a, \psi)$ ,  $\varepsilon\Phi_2(y, a, \psi)$ ,  $\varepsilon\Phi_3(y, a, \psi)$  відповідно другі доданки двох перших рівнянь і праву частину третього рівняння системи (1.9) і застосовуючи до системи (1.9) метод усереднення, (див. [1, 3, 6]), одержуємо рівняння першого наближення:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi D} \sum_{i=1}^r \{f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) + \\ &+ f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)}))\} + \varepsilon\Phi_{10}(y, a), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi D} \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) z'_a(y, a, \psi_i^{(1)})}{|z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})|} + \right. \\ &+ \left. \frac{f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) z'_a(y, a, \psi_i^{(2)})}{|z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})|} + \varepsilon\Phi_{20}(y, a), \right. \\ &\left. \frac{dy}{dt} = \varepsilon\Phi_{30}(y, a), \right. \end{aligned} \quad (1.21)$$

в яких  $\Phi_{10}(y, a)$ ,  $\Phi_{20}(y, a)$  та  $\Phi_{30}(y, a)$  є середніми значеннями щодо  $\psi$  функцій  $\Phi_1(y, a, \psi)$ ,  $\Phi_2(y, a, \psi)$  та  $\Phi_3(y, a, \psi)$ .

Рівняння першого наближення дають усереднену картину коливань із запізненням, але не виявляють явищ, які виникають через наявність миттєвих імпульсів. Для виявлення цих явищ необхідно розглядати, в крайньому випадку, покращене 1-ше наближення. Для визначення розв'язку в покращеному 1-му наближенні враховуємо всі «осцилюючі» члени в правих частинах рівнянь (1.9). Після деяких обчислень одержуємо

$$a_1 = a - \frac{\varepsilon}{\pi D} \left\{ \sum_{i=1}^r f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\psi - \psi_i^{(1)})}{k\omega} + \sum_{i=1}^r f_1(y, x_0, \omega z_{\psi}^{\prime}(y, a, \psi_i^{(2)})) \operatorname{sign}(z_{\psi}^{\prime}(y, a, \psi_i^{(2)})) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\psi - \psi_i^{(2)})}{k\omega} \left. \right\} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k} \sin k\psi - B_{1k} \cos k\psi}{k\omega}, \\
\varphi_1 = \varphi + \frac{\varepsilon}{\pi D} & \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{f_1(y, x_0, \omega z_{\psi}^{\prime}(y, a, \psi_i^{(1)})) z_a^{\prime}(y, a, \psi_i^{(1)})}{|z_{\psi}^{\prime}(y, a, \psi_i^{(1)})|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\psi - \psi_i^{(1)})}{k\omega} + \right. \\
& + \sum_{i=1}^r \frac{f_1(y, x_0, \omega z_{\psi}^{\prime}(y, a, \psi_i^{(2)})) z_a^{\prime}(y, a, \psi_i^{(2)})}{|z_{\psi}^{\prime}(y, a, \psi_i^{(2)})|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\psi - \psi_i^{(2)})}{k\omega} \left. \right\} + \\
& + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k} \sin k\psi - B_{2k} \cos k\psi}{k\omega}, \quad (1.22) \\
y_1 = y + \varepsilon & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{3k} \sin k\psi - B_{3k} \cos k\psi}{k\omega},
\end{aligned}$$

де  $A_{ik}$ ,  $B_{ik}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — коефіцієнти Фур'є функцій  $\Phi_i(y, a, \psi)$ ; величини  $a, \varphi, y$  визначаються рівняннями (1.21).

Приклад. Розглянемо коливну систему, що описується рівняннями

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) - \alpha y x^3(t) &= \varepsilon \left[ x^2(t) \frac{dx(t)}{dt} \delta(x - x_0) + y x^3(t - \Delta) \right], \quad (1.23) \\
\frac{dy}{dt} &= \varepsilon h x(t - \Delta),
\end{aligned}$$

де  $\Delta = \text{const}$ . При  $\varepsilon = 0$  наближений розв'язок системи (1.23) має вигляд

$$x = z(y, a, \psi) = a \cos \psi + \frac{\alpha y a^3}{32} (\cos \psi - \cos 3\psi), \quad (1.24)$$

$$\psi = \omega(y, a) t + \varphi, \quad \omega(y, a) = \frac{1}{1 + \frac{3\alpha y}{8} a^2}.$$

Якщо позначимо

$$\xi = \cos \psi, \quad p = -\frac{8 + \alpha y a^2}{\alpha y a^2}, \quad q = \frac{8x_0}{\alpha y a^3},$$

то рівняння (1.16) можна переписати так:

$$\xi^3 + p\xi + q = 0. \quad (1.25)$$

У випадку, коли  $a > 0$  і  $-\frac{8}{\alpha a^2} < y < -\sigma < 0$ , рівняння (1.25) має один дійсний корінь

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

звідки  $\psi_{1,2} = \pm \arccos \xi + 2k\pi$ .

Припустимо, що  $0 < \arccos \xi < \frac{\pi}{2}$ . Повторюючи міркування, наведені вище, одержуємо усереднені рівняння

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon \omega x_0^2 a}{\pi D} (1 - \xi^2)^{1/2} \left( 1 + \frac{\alpha y a^2}{4} - \frac{3\alpha y a^2}{8} \xi^2 \right) \operatorname{sign} a + \frac{\varepsilon 3y a^4}{8D} \sin \omega \Delta,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon \omega x_0^2 \xi}{\pi D} \left[ 1 + \frac{3\alpha y a^2}{8} (1 - \xi^2) \right] \operatorname{sign} a + \frac{\varepsilon 3y a^3}{8D} \cos \omega \Delta,$$

де  $y = \operatorname{const}$  і якщо  $-\frac{8}{\alpha a^2} < y < -\sigma < 0$ ,  $D = -a\omega(1 - \alpha y a^2)$ .

2. Подамо тепер обґрунтування викладеної вище методики. Змінна  $a$  в формулах заміни (1.17) повинна бути малою, тому для правильності цієї заміни необхідно довести, що розв'язок  $a(t)$  рівнянь (1.21) залишається малим в деякому інтервалі часу, оскільки згідно з результатами праць [3, 6]  $a(t)$  з системи (1.9) близьке до рівнянь (1.21).

Теорема. Якщо 1)  $F_j(y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt})$  ( $j = 1, 2$ ) і  $f_1\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right) = I\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right) \left| \frac{dx}{dt} \right|$  системи (1.1) є поліномами своїх змінних, причому

$$|F_1(y, y_\Delta, 0, 0, 0, 0)| < \delta \ll 1, \quad (2.1)$$

$$|I(y, x_0, 0)| < \delta_1 \ll 1, \quad (2.2)$$

$\delta_1 \ll 1$  настільки, щоб

$$\left| \delta_1 \frac{z'_{1\psi}}{A(y, a)} \right| \ll 1, \quad \left| \delta_1 \omega \frac{z'_{1\psi}}{A(y, a)} \right| \ll 1. \quad (2.3)$$

2) Наближений розв'язок незбуреного рівняння має вигляд

$$x = z(y, a, \psi) = \sum_{n=1}^k a^n z_n(y, \psi) \quad (2.4)$$

і

$$D(y, a) = \omega z'_a z''_{\psi^2} - (\omega z'_\psi)'_a z'_\psi = aA(y, a), \quad (2.5)$$

де функція  $A(y, a)$  відмінна від нуля, тоді розв'язок  $a(t)$  системи (1.21) рівномірно обмежений достатньо малим числом на інтервалі  $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ , якщо початкове значення  $a(0)$  — мале.

Доведення. Позначимо праву частину першого рівняння системи (1.21) через  $\varepsilon \Pi(y, a)$  і будемо писати її у вигляді

$$\varepsilon \Pi(y, a) = \varepsilon [\Phi_{10}(y, a) + Q(y, a)]. \quad (2.6)$$

Оскільки функція  $F_1$  є поліномом від змінних  $y, y_\Delta, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt}$  і  $x = z(y, a, \psi)$  також є поліномом від  $a$ , то функції  $F_1$  і  $F_1 z'_\psi$  є поліномами від  $a$ , коефіцієнти яких залежать від  $y, \psi$ . Зобразимо функцію  $F_1$  у вигляді суми

$$F_1 = F_1^*(y, a, \psi) + F_1^{**}(y), \quad (2.7)$$

де  $F_1^*(y, 0, \psi) = 0$ , і

$$|F_1^{**}(y)| = |F_1(y, y_\Delta, 0, 0, 0, 0)| < \delta \ll 1. \quad (2.8)$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Phi_1(y, a, \psi) = & -F_1^{**}(y) \frac{z'_{1\psi}(y, \psi)}{A(y, a)} - \frac{1}{D(y, a)} \left\{ F_1^{**}(y) \sum_{n=2}^k a^n z'_{n\psi}(y, \psi) + \right. \\ & \left. + F_1^*(y, a, \psi) z'_\psi + [\omega z'_y z''_{\psi_2} - (\omega z'_\psi)'_y z'_\psi] F_2 \right\} = -F_1^{**}(y) \frac{z'_{1\psi}(y, \psi)}{A(y, a)} + aB(y, a, \psi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Із (2.3), (2.8) і припущення теореми випливає, що

$$\left| F_1^{**}(y) \frac{z'_{1\psi}(y, \psi)}{A(y, a)} \right| \ll 1$$

і  $B(y, a, \psi)$  обмежена функція. Тому

$$|\Phi_{10}(y, a)| < c'a + c'_1, \quad (2.10)$$

де  $c'_1$  досить мала,  $c'$  — обмежена.

Зобразимо  $I\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right)$  у вигляді суми

$$I = I(y, x_0) + I_1(y, a, \psi_i^{(j)}, x_0), \quad (2.11)$$

де  $I_1(y, 0, \psi_i^{(j)}, x_0) = 0$ , розглянемо вираз

$$\begin{aligned} Q(y, a) = & -\frac{1}{2\pi D} \sum_{i=1}^r \{ f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) + \\ & + f_1(y, x_0, \omega z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) \} = \\ = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{I(y, x_0) \omega z'_{1\psi}(y, \psi_i^{(1)})}{A(y, a)} \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) + \right. \\ + & \frac{I(y, x_0) \omega z'_{1\psi}(y, \psi_i^{(2)})}{A(y, a)} \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) + \left[ \frac{I(y, x_0) \omega}{D(y, a)} \sum_{n=2}^k a^n z'_{n\psi}(y, \psi_i^{(1)}) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{I_1(y, a, \psi_i^{(1)}, x_0) \omega}{D(y, a)} z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)}) \right] \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(1)})) + \right. \\ + & \left[ \frac{I(y, x_0) \omega}{D(y, a)} \sum_{n=2}^k a^n z'_{n\psi}(y, \psi_i^{(2)}) + \frac{I_1(y, a, \psi_i^{(2)}, x_0) \omega}{D(y, a)} z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)}) \right] \times \\ & \left. \times \operatorname{sign}(z'_\psi(y, a, \psi_i^{(2)})) \right\} = aQ_1(x_0, a, y) + Q_2(x_0, a, y). \end{aligned}$$

Враховуючи (2.2), (2.3), (2.11), маємо, що  $|Q_1(x_0, a, y)|$  обмежена  $|Q_2(x_0, a, y)| \ll 1$ .

Із (2.10) та (2.12) маємо

$$|\pi(y, a)| \leq ac + c_1, \quad (2.13)$$

де  $c_1$  — досить мала, при  $0 \leq a \leq A$ ,  $|y| \leq Y$ .

Покажемо тепер, що розв'язок  $a(t)$  системи (1.21) обмежений досить малим числом  $M$ .

З першого рівняння системи (1.21) та умови (2.13) маємо нерівність

$$\frac{da}{dt} \leq \varepsilon ca + \varepsilon c_1. \quad (2.14)$$

Вказане твердження справедливе, оскільки розв'язок (2.14) обмежений таким чином:  $a \leq a_0 e^{\varepsilon ct} + \frac{c_1}{c} (e^{\varepsilon ct} - 1)$  і якщо  $a_0$  досить мале,  $c_1 \ll c$ ,  $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ , то  $|a| \leq M$ .

Згідно з теоремою розв'язок  $a(t)$  рівнянь (1.21) обмежений малою сталою, якщо початкові умови досить малі. Підставляючи розв'язки рівнянь (1.21) в (2.3), одержуємо ряд, збіжний при  $k \rightarrow \infty$ , а це означає, що метод побудови розв'язку вірний.

З а у в а ж е н н я. Вказану вище методику можна застосовувати і для розв'язування неавтономної системи в резонансному випадку, тобто, коли функції  $S_1, F_2$  в рівняннях (1.1) залежать явно від часу.

#### Л І Т Е Р А Т У Р А

1. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Методы усреднения в нелинейной механике. К., «Наук. думка», 1971, 440 с.
2. С а м о й л е н к о А. М. Применения метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром.— УМЖ, 1961, 13, № 3, с. 103—109.
3. С а м о й л е н к о А. М. Исследование дифференциального уравнения с «нерегулярной» правой частью. III Konferenz über nichtlineare schwingungen. Academic — berlag, Berlin, 1965.
4. С а м о й л е н к о А. М. Метод уравнения в системах с толчками.— Мат. физика, 1971, вып. 9, с. 101—117.
5. Н г у е н К х а к Л а н. Исследование колебаний в нелинейных системах с медленно меняющимися параметрами и с запаздыванием.— В кн.: Аналитические методы теории дифференциальных уравнений. К., изд. Ин-та математики АН УССР, 1977. (В печати.)
6. Р у б а н и к В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., «Наука», 1969, 287 с.

Інститут математики АН УРСР

Надійшла до редакції  
18.XI 1975 р.