УДК 517.941.92

І. І. Старун

Інтегрування однієї двовимірної системи з точкою повороту

В цій роботі розглядається найпростіша задача з точкою повороту для системи виду

$$\varepsilon x' = [t \cdot A + \varepsilon B]\, x, \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

де $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2$ — сталі матриці, $\varepsilon > 0$ — малий параметр. Точка $t = 0$ — точка повороту для даної системи, якщо

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0. \tag{2}$$

(Тут під точкою повороту для системи виду $\varepsilon x' = [A\,(t) + \varepsilon B\,(t)]x$ розуміється точка $t = t_0 \in [0, T]$, в якій власні значення матриці $A\,(t)$ рівні, але різні при $\forall\, t \neq t_0$). Якщо умова (2) не справджується, то власні значення матриці $t \cdot A$ тотожно рівні на $[0, T]$ і розв'язки системи (1) можна побудувати методами з [1, 2]. В цій роботі знайдено розв'язок системи (1) при виконанні умови (2). При цьому використано результат із [3], що відноситься до однозначного зведення двох сталих матриць другого порядку до найпростішого виду за допомогою однієї і тієї ж матриці перетворення. Згідно з [3, с. 214—232] існує така неособлива матриця S, що підстановка

$$x = Sy \tag{3}$$

зводить систему (1) до вигляду

$$\varepsilon y' = [tP_0 + \varepsilon P_1]\, y, \tag{4}$$

де матриці P_0 і P_1 мають один із таких чотирьох видів:

$$P_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ \Delta & \eta \end{pmatrix}; \tag{6}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \eta_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & \nabla \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Тут $\det S = \frac{1}{\nabla}$ $\left(\text{або } \frac{1}{\Delta}\right)$, а числа $\lambda_k, \lambda, \eta_k, \eta$ виражаються через елементи матриць A, B і S. Надалі розглядатимемо систему (4) і в кожному з випадків (5) — (8) зазначимо розв'язок цієї системи.

Розглянемо спочатку найпростіші випадки (5)—(7). В цих випадках легко визначити загальний розв'язок системи (4) завдяки тому, що ця система інтегрується в квадратурах. Цей розв'язок має вигляд

$$y = Y(t, \varepsilon) \cdot c, \tag{9}$$

де

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

а матриця $Y(t, \varepsilon)$ має вигляд

$$Y(t, \varepsilon) = \left[\exp\left(\frac{\lambda_1}{2\varepsilon} t^2 + \eta_1 t\right); \qquad \exp\left(\frac{\lambda_2}{2\varepsilon} t^2 + \eta_2 t\right)\right] \tag{11}$$

у випадку (5),

$$Y(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{\lambda}{2\varepsilon} t^2 + \eta t\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2\varepsilon} + \Delta t & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

у випадку (6),

$$Y(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon) \cdot H(t, \varepsilon), \tag{13}$$

де

$$Q(t, \varepsilon) = \left[\exp\left(\frac{\lambda_1}{2\varepsilon} t^2 + \eta_1 t\right); \qquad \exp\left(\frac{\lambda_2}{2\varepsilon} t^2 + \eta_2 t\right)\right], \tag{14}$$

$$H(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(t, \varepsilon) & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

а

$$f(t, \varepsilon) = \frac{\eta_1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \tau \exp\left(\frac{p\tau^2}{2\varepsilon} + q\tau\right) d\tau, \qquad p = \lambda_1 - \lambda_2, \qquad q = \eta_1 - \eta_2, \tag{16}$$

у випадку (7).

Розглянемо тепер випадок (8). В цьому випадку система (4), взагалі кажучи, не інтегрується в квадратурах. Для відшукання розв'язку поступимо так. Зробимо заміну

$$y = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t R(\tau, \varepsilon)\, d\tau\right) \cdot z, \tag{17}$$

де діагональна матриця $R(t, \varepsilon)$ має вигляд

$$R(t, \varepsilon) = [t\lambda_1 + \varepsilon\eta_1; \quad t\lambda_2 + \varepsilon\eta_2], \tag{18}$$

одержимо систему

$$\varepsilon z' = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t R(t, \varepsilon)\, d\tau\right) L(t, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t R(\tau, \varepsilon)\, d\tau\right) \cdot z, \tag{19}$$

в якій

$$L(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon\nabla \\ t & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Згідно з [4, гл. VI, § 6] систему (19) можна записати у вигляді

$$\varepsilon z' = V(t, \varepsilon)\, z, \tag{21}$$

де

$$V(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\nabla\cdot\varphi(t,\varepsilon)\\ t\varphi^{-1}(t,\varepsilon) & 0\end{pmatrix}, \tag{22}$$

а

$$\varphi(t,\varepsilon)=\exp\left(\alpha\frac{t^2}{2\varepsilon}+\beta t\right),\qquad \alpha=\lambda_2-\lambda_1,\qquad \beta=\eta_2-\eta_1. \tag{23}$$

Систему (21) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} z_1' &= \nabla\cdot\varphi(t,\varepsilon)\,z_2,\\ \varepsilon z_2' &= t\varphi^{-1}(t,\varepsilon)\,z_1 \end{aligned} \tag{24}$$

і замінимо еквівалентним рівнянням другого порядку відносно функції z_1

$$\varepsilon z_1'' - (\alpha t+\varepsilon\beta)\,z_1' - \nabla t z_1 = 0. \tag{25}$$

Заміною

$$h(\omega,t)=z_1\cdot\exp\left(\frac{\nabla}{\alpha}\,t\right),\qquad \omega=\sqrt{\frac{\alpha}{2\varepsilon}}\left(t+\frac{\varepsilon}{\alpha^2}(\alpha\beta+2\nabla)\right) \tag{26}$$

рівняння (25) зведемо до рівняння Ерміта [5]

$$h''-2\omega h'+2\nu h=0, \tag{27}$$

в якому

$$\nu=\frac{\varepsilon}{2\alpha^3}\nabla(\nabla+\alpha\beta). \tag{28}$$

Завдяки наявності множника ε можна припускати $|\nu|<1$. Якщо $\nu=0$ (тобто $\nabla+\alpha\beta=0$), то розв'язок рівняння (27) (а значить рівняння (25), системи (24)) шукається в квадратурах. Якщо $0<|\nu|<1$, то за лінійно незалежні розв'язки рівняння (27) можна взяти функції Ерміта $H_\nu(\omega)$ і $H_\nu(-\omega)$ [5], які при будь-яких ν і ω є аналітичними функціями. Зазначимо, що функція $H_\nu(\omega)$ виражається через вироджену гіпергеометричну функцію $F(\alpha,\beta,\omega)$

$$H_\nu(\omega)=\frac{2^\nu\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},\omega\right)+\frac{2^\nu\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}\omega^{1/2}F\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2},\omega\right), \tag{29}$$

для якої має місце розвинення

$$F(\alpha,\beta,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}\cdot\frac{\omega^k}{k!}. \tag{30}$$

Тому загальний розв'язок рівняння (25) можна записати у вигляді

$$z_1=[C_1H_\nu(\omega)+C_2H_\nu(-\omega)]\exp\left(-\frac{\nabla}{\alpha}\,t\right),\qquad \omega=\sqrt{\frac{\alpha}{2\varepsilon}}\left(t+\frac{\varepsilon}{\alpha^2}(\alpha\beta+2\nabla)\right). \tag{31}$$

А з (24) знаходимо

$$\begin{aligned} z_2=\varphi^{-1}(t,\varepsilon)\exp\left(-\frac{\nabla}{\alpha}\,t\right)\Bigg[\widetilde{C}_1\left(\rho H_{\nu-1}(\omega)-\frac{\nabla}{\alpha}H_\nu(\omega)\right)+\\ +\widetilde{C}_2\left(\rho H_{\nu-1}(-\omega)-\frac{\nabla}{\alpha}H_\nu(-\omega)\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{32}$$

Тут взято $\rho = \varepsilon^{1/2}\alpha^{-3/2}(\nabla + \alpha\beta)$, $\widetilde{C}_k = \dfrac{1}{\alpha} C_k$, $k = 1, 2$ і використано формули

$$H'_\nu(\omega) = 2\nu H_{\nu-1}(\omega), \qquad H'_\nu(-\omega) = -2\nu H_{\nu-1}(-\omega). \tag{33}$$

Знаючи вектор $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, із (17) визначаємо вектор y, а цим самим розв'язок системи (4) визначений.

Зауваження. Виходячи з (9), (11) — (17), (23), (26), (31), (32), можна зробити такий висновок. У випадках (5), (6) $\| y(t, \varepsilon) \| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, якщо $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ $(\operatorname{Re}\lambda < 0)$. У випадках (7), (8) $\| y(t, \varepsilon) \| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, якщо $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \leqslant 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, К., «Наук. думка», 1966.
2. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях, К., «Вища школа», 1971.
3. Крылов Б. Л. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса.— Труды Казанского авиац. ин-та, 1956, **31**.
4. Еругин Н. П., Штокало И. З. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, К., «Вища школа», 1974.
5. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций, М., «Наука», 1974.

Гомельський державний
університет

Надійшла до редакції
26.XI 1975 р.