УДК 517.94

З. Ю. Ф і л е р

До побудови розв'язку однорідної лінійної системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами матричним методом

Знайдено формулу відшукання фундаментальної системи розв'язків за допомогою утворення оберненої матриці та диференціювання матриць, яка дозволяє одержувати розв'язок задачі Коші та загальний розв'язок. Одночасно одержано метод відшукання експоненціалу матриці.

1. Розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \; x(0) = x_0, \tag{1}$$

де $x = \operatorname{colon}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_0 = \operatorname{colon}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $A = (a_{ik})$, $i, k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, згідно з методом Коші [1] будемо шукати у вигляді

$$x = \sum \operatorname*{Res}_{p_i} \frac{\Phi(p)}{F(p)} e^{pt}. \tag{2}$$

Тут $F(p)$ — характеристичний многочлен:

$$F(p) = \det(Ep - A),$$

p_i — його корені, які мають кратність r_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$,

$$\Phi(p) = \operatorname{colon}[\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_n(p)],$$

а $\varphi_i(p)$ — аналітичні функції, які треба визначити.

Підставляючи (2) у (1), одержимо

$$\sum_i \operatorname{Res}_{p_i} \frac{(pE - A)\,\Phi(p)\,e^{pt}}{F(p)} = 0.$$

Щоб задовольнити ці рівняння, достатньо взяти $\Phi(p)$ таким, щоб $(pE - A)\,\Phi(p) = \alpha \cdot F(p)$, де $\alpha = \operatorname{colon}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, α_i — довільні сталі. Звідси $\Phi(p) = (pE - A)^{-1} F(p)\,\alpha$. Це дає для розв'язку (2)

$$x = \sum_i \operatorname{Res}_{p_i} (pE - A)^{-1} e^{pt} \alpha.$$

Використовуючи початкові умови, одержимо $\alpha = x_0$ та

$$x = x_E(t)\,x_0, \tag{3}$$

де квадратна матриця $x_E(t)$ визначиться формулою

$$x_E(t) = \sum_i \operatorname{Res}_{p_j} \frac{\overline{(Ep - A)}\,e^{pt}}{\prod\limits_{e=1}^{s} (p - p_e)^{r_e}}, \tag{4}$$

$\overline{(Ep - A)}$ є приєднана матриця до матриці $Ep - A$.

Формула (4) може бути одержана й іншими методами, зокрема, за допомогою операційного числення [2].

Кожний лишок відносно полюса p_j кратності r_j при цьому відшукується за формулою [2]

$$\operatorname{Res}_{p=p_j} \frac{\overline{(Ep - A)}\,e^{pt}}{\prod\limits_{l=1}^{s} (p - p_l)^{r_l}} = \frac{1}{(r_j - 1)!} \lim_{p \to p_j} \frac{d^{r_j - 1}}{dp^{r_j - 1}} \left[(p - p_j)^{r_j} \frac{\overline{(Ep - A)}\,e^{pt}}{\prod\limits_{l=1}^{s} (p - p_l)^{r_l}} \right] =$$

$$= \frac{1}{(r_j - 1)!} \frac{d^{r_j - 1}}{dp^{r_j - 1}} \left[\frac{\overline{(Ep - A)}\,e^{pt}}{\prod\limits_{l \neq j} (p - p_l)^{r_l}} \right]_{p=p_j}.$$

Тому

$$x_E(t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(r_j - 1)!} \frac{d^{r_j - 1}}{dp^{r_j - 1}} \left[\frac{\overline{(Ep - A)}\,e^{pt}}{\prod\limits_{l \neq j} (p - p_l)^{r_l}} \right]_{p=p_j}. \tag{5}$$

Очевидно, що матриця $x_E(t)$ є фундаментальна матриця системи (1), складена з стовпців $x^i(t)$ — розв'язків цієї системи, які відповідають початковим умовам $x^i(0) = e^i$, а матриця-стовпець e^i є $\operatorname{colon}(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in})$,

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Початковим умовам $x(t_0) = x_0$ відповідає розв'язок

$$x(t) = x_E(t - t_0) \cdot x_0. \tag{6}$$

2. Формули (5) та (6) дозволяють описати алгоритм пошуку розв'язку так:

а) знаходимо приєднану матрицю $\overline{(Ep - A)}$;

б) складаємо характеристичний многочлен (наприклад, як суму добутків елементів першого рядка матриці $Ep - A$ на елементи першого стовпця матриці $\overline{(Ep - A)}$);

в) знаходимо корені характеристичного рівняння p_j та їх кратності r_j;

г) утворюємо матриці

$$G_j(p, t) = \overline{(Ep - A)} \prod_{e \neq j} (p - p_e)^{-r_e} e^{pt}; \tag{7}$$

д) визначаємо похідні по p порядків $r_j - 1$ від цих матриць, котрі потім обчислюємо відповідно в точках p_j;

е) утворюємо фундаментальну матрицю $x_E(t)$ як суму одержаних матриць;

є) відшукуємо потрібний розв'язок задачі Коші за формулою (6).

Якщо необхідно знайти *загальний* розв'язок системи, тоді матрицю-стовпець x_0 треба вважати такою, що має довільні сталі компоненти x_i^0.

Усі операції а) — є) з конкретною числовою матрицею A можуть бути виконані на ЕЦРМ (природно, що корені p_j будуть визначені із заздалегідь заданою точністю ε; корені, які відрізняються один від одного менше, ніж на ε, будуть вважатися рівними). Таким чином, за допомогою ЕЦРМ можна одержати аналітичний розв'язок задачі Коші. Лінійно незалежні стовпці x^i матриці $x_E(t)$ дозволяють утворити й загальний розв'язок

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x^i(t)$$

де C_i — довільні сталі.

3. Якщо кратність r_j кореня p_j більше за 1, то у розв'язку (6) *може* з'явитися множник $t^{s_j - 1}$ при експоненті $e^{p_j t}$. Фактична наявність такого множника залежіть від рангу матриці $A - p_j E$. Нехай $\operatorname{rang}(A - p_j E) = n - 1 - k$; тоді хоч би один мінор порядку $n - 1 - k$ матриці $A - p_j E$ відмінний від нуля, тоді як усі мінори більш високих порядків дорівнюють нулеві.

Неважко бачити, що тоді

$$\frac{d^\nu}{dp^\nu} \overline{(pE - A)} \,\Big|_{p=p_j} = 0 \text{ при } \nu = 0, 1, \ldots, k,$$

а тому у розв'язку не буде членів з множниками $t^{s_j - 1}, t^{s_j - 2}, \ldots, t^{s_j - 1 - k}$.

Звичайно рекомендований спосіб відшукання n лінійно незалежних розв'язків $x^i = H^i e^{\lambda_i t}$ й утворення загального розв'язку у вигляді їх лінійної комбінації стає незручним; крім того, визначення необхідного розв'язку задачі Коші потребує розв'язати систему лінійних рівнянь для відшукання підхідних значень C_i.

4. Не виникає особливих труднощів й у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння. Якщо матриця A — дійсна, то комплексні корені $p_e = \alpha_e + i\beta_e$ попарно спряжені. Тоді кожній парі відповідають спряжені доданки, сума яких дійсна:

$$\frac{1}{(r_j - 1)!} \left[\frac{\partial^{r_j - 1} G(\alpha_j + i\beta_j, t)}{\partial p^{r_j - 1}} + \frac{\partial^{r_j - 1} G(\alpha_j - i\beta_j, t)}{\partial p^{r_j - 1}} \right] =$$

$$= \frac{2}{(r_j - 1)!} \operatorname{Re} \frac{\partial^{r_j - 1} G_j(\alpha_j + i\beta_j, t)}{\partial p^{r_j - 1}}.$$

5. Неважко бачити, що одержаний нами вираз $x_E(t)$ є експонента e^{tA}. Покладаючи $t = 1$, одержимо

$$e^A = x_E(1) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(r_j - 1)!} \frac{\partial^{r_j - 1} G_j(p_j, 1)}{\partial p^{r_j - 1}}. \quad (9)$$

Таким чином, ми одержали й спосіб утворення експоненціалу матриці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. М. — Л., Гостехиздат, 1950, 368 с.
2. Шостак Р. Я. Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1968, 279 с.

Донецький політехнічний інститут

Надійшла до редакції 25.II 1975 р.