УДК 539.12

В. І. Фущич, Ю. М. Сегеда

Про групи інваріантності деяких рівнянь релятивістської квантової механіки

У цій роботі знаходимо групи інваріантності рівнянь

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\frac{1}{l}\Box\varphi(\tau,x); \tag{1}$$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=\gamma_\mu p^\mu\Psi(\tau,x),\qquad p_\mu=i\frac{\partial}{\partial x^\mu},\qquad \mu=0,1,2,3, \tag{2}$$

де $\Box=\dfrac{\partial}{\partial x_0^2}-\nabla^2$ — оператор Даламбера, x — точка у просторі Мінковського, l — стала величина.

Чотирирядні матриці γ_μ задовольняють співвідношення

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu},\qquad g_{00}=-g_{kk}=1,\quad k=1,2,3;\quad g_{\mu\nu}=0,\quad \mu\neq\nu. \tag{3}$$

В рівнянні (2) за індексом μ, що повторюється, береться сума від $\mu=0$ до $\mu=3$. $\varphi(\tau,x)$ — скалярна функція, $\Psi(\tau,x)$ — чотирирядна матриця-стовпець

$$\Psi(\tau,x)=\begin{pmatrix}\psi_1(\tau,x)\\ \psi_2(\tau,x)\\ \psi_3(\tau,x)\\ \psi_4(\tau,x)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Змінна τ — власний час частинки.

Будемо через Q_A позначати базисні вектори алгебри Лі деякої групи G. Для того, щоб рівняння (1) і (2) були інваріантні щодо групи G, повинні виконуватись, згідно з означенням, такі комутаційні співвідношення:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{l}\Box,Q_A\right]_-\varphi(\tau,x)=0; \tag{5}$$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial\tau}-\gamma_\mu p^\mu,Q_A\right]_-\Psi(\tau,x)=0. \tag{6}$$

Будемо вживати інколи термін «алгебра інваріантності» замість «група інваріантності».

1. Знайдемо максимальну групу інваріантності рівняння (1) в класі всіх диференціальних операторів першого порядку

$$Q_A = \sum_{j=0}^{4} f_A^j(\tau, x)\, D_j + f_A(\tau, x), \tag{7}$$

де

$$D_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_4 = i\frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{8}$$

A — деяка множина індексів.

Наша задача полягає в тому, щоб знайти функції $f_A^j(\tau, x)$, $f_A(\tau, x)$, при яких задовольняється умова (5). Умову (5) можна записати в такій формі:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{l}\Box, Q_A\right]_- = i\lambda(\tau, x)\left(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{l}\Box\right), \tag{9}$$

де $\lambda(\tau, x)$ — двічі неперервно диференційовна функція, яку потрібно знайти. Підставляючи (7) в (9), одержимо досить громіздку систему диференціальних рівнянь для функцій $\lambda(\tau, x)$, $f_A(\tau, x)$, $f_A^j(\tau, x)$. Розв'язуючи її, ми одержимо набір 17 операторів $\{Q_A\}$, що задовольняють умову (9). Ці оператори мають такий явний вигляд:

$$A = -i\left(\tau^2\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau t\frac{\partial}{\partial t} + \tau x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + 2\tau\right) + \frac{l}{4}s^2,$$

$$D = i\left(2\tau\frac{\partial}{\partial \tau} + t\frac{\partial}{\partial t} + x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

$$R = i\frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$G_\mu = \tau p_\mu - \frac{l}{2}x_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \tag{10}$$

$$x_0 \equiv t, \qquad s^2 = t^2 - \vec{x}^2 = x_\mu x^\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Оператори (10) утворюють алгебру Лі і задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}
&[A, D] = -2iA; \quad [D, R] = -2iR; \quad [R, G_\mu] = iP_\mu,\\
&[A, R] = iD; \quad [D, P_\mu] = -iP_\mu; \quad [R, J_{\mu\nu}] = 0,\\
&[A, P_\mu] = iG_\mu; \quad [D, G_\mu] = iG_\mu; \quad [P_\mu, G_\nu] = -i\frac{l}{2}g_{\mu\nu},\\
&[A, G_\mu] = 0; \quad [D, J_{\mu\nu}] = 0; \quad [A, J_{\mu\nu}] = 0,\\
&[J_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu); \quad [R, P_\mu] = 0,\\
&[J_{\mu\nu}, G_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}G_\mu - g_{\mu\lambda}G_\nu); \quad [G_\mu, G_\nu] = 0,\\
&[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Ця алгебра Лі породжує відповідну 17-параметричну групу Лі, яку подібно групі інваріантності нерелятивістського рівняння Шредінгера [1—3] будемо називати релятивістською групою Шредінгера.

Таким чином, остаточно маємо такий результат.

Т е о р е м а 1. *Рівняння* (1) *інваріантне відносно релятивістської групи Шредінгера, алгебра Лі якої визначається комутаційними співвідношеннями* (11).

З а у в а ж е н н я 1. За допомогою безпосередніх обчислень можна переконатись, що якщо до операторів $J_{\mu\nu}$ додати оператор

$$J_{\mu4}=\tau\tilde{p}_{\mu}-\frac{1}{2}(x_{\mu}p+px_{\mu});\quad \tilde{p}_{\mu}=p_{\mu}\frac{2p}{l};\qquad p=(p_{\alpha}p^{\alpha})^{1/2},$$

то сукупність операторів $\{J_{\mu\nu}, J_{\mu4}\}$ задовольняє комутаційні співвідношення алгебри Лі групи $SO(1,4)$:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}]=i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha}-g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta}+g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta}-g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}),$$
$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda4}]=i(g_{\nu\lambda}J_{\mu4}-g_{\mu\lambda}J_{\nu4}),$$
$$[J_{\mu4}, J_{\nu4}]=iJ_{\mu\nu}.$$

З а у в а ж е н н я 2. В роботі [4] була запропонована релятивістська група Галілея $\tilde{G}_5$, яка є безпосереднім узагальненням групи Галілея G_4. Група $\tilde{G}_5$ є підгрупою релятивістської групи Шредінгера.

2. У цьому пункті знайдемо групи симетрії рівняння (2) — рівняння типу Дірака з власним часом.

Т е о р е м а 2. *Рівняння* (2) *інваріантне відносно групи обертань і зсувів в п'ятивимірному просторі Мінковського.*

Д о в е д е н н я. Безпосередньою підстановкою можна переконатись, що сукупність операторів

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t},\qquad P_k=-i\frac{\partial}{\partial x_k},\qquad P_4=-i\frac{\partial}{\partial\tau};$$

$$J_{\mu\nu}=x_{\mu}p_{\nu}-x_{\nu}p_{\mu}+S_{\mu\nu},\qquad S_{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}];$$

$$J^{\mathrm{I}}_{4\mu}=\tau p_{\mu}+\frac{1}{2}(x_{\mu}\hat{M}+\hat{M}x_{\mu});\qquad \hat{M}=\gamma_{\mu}p^{\mu} \tag{12}$$

задовольняє умови (6), а їх комутаційні співвідношення мають такий вигляд:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}]=i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha}-g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta}+g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta}-g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha});$$
$$[J_{\mu\nu}, P_{\lambda}]=i(g_{\nu\lambda}P_{\mu}-g_{\mu\lambda}P_{\nu}), \tag{13}$$

де $\mu,\nu,\lambda,\alpha,\beta=0,1,2,3,4;\quad g_{00}=-g_{11}=\ldots=-g_{44}=1.$
Із (13) видно, що сукупність операторів $\{J_{\mu\nu}, P_{\lambda}\}$, $\mu,\nu,\lambda=0,1,\ldots 4$ є базисні елементи алгебри Лі групи обертань і зсувів в 5-вимірному просторі Мінковського — групи $\mathbf{P}(1,4)$. Більш детально про цю групу та її застосування в фізиці див. [5].

На множині розв'язків рівняння (2) оператори (12) можна зобразити у вигляді

$$P_0=i\frac{\partial}{\partial t},\qquad P_k=-i\frac{\partial}{\partial x_k},\qquad P_4=-i\frac{\partial}{\partial\tau}$$

$$J^{\mathrm{II}}_{\mu\nu}=J_{\mu\nu} \tag{12a}$$

$$J^{\mathrm{II}}_{4\mu}=\tau p_{\mu}-x_{\mu}p_4+\frac{i}{2}\gamma_{\mu},\qquad \mu,\nu=0,1,2,3.$$

3. В попередніх розділах ми знаходили алгебри інваріантності диференціальних рівнянь (1) і (2) в класі диференціальних операторів першого порядку. В [6] було показано, що, наприклад, рівняння Максвелла і Дірака допускають алгебру інваріантності, базисні елементи якої є істотно інтегродиференціальними операторами. Це означає, що якщо розширити клас допустимих операторів Q_A до інтегродиференціальних операторів, то можна відкрити цілком нові симетрії рівнянь руху. В цьому пункті ми знайдемо декілька алгебр інваріантності рівняння (2) в класі інтегродиференціальних операторів.

Теорема 3. *Якщо на множині розв'язків рівнянь* (1) *і* (2) *має місце умова* $p_\mu^2 > 0$, *то ці рівняння інваріантні відносно груп* $SO(1, 4)$ *і* $SO(1, 5)$ *відповідно.*

Доведення проведемо тільки для рівняння (2), бо для (1) воно цілком аналогічне. Як і в [7], розглянемо оператор

$$R_\mu = \frac{1}{2}(P^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha}P^\alpha), \qquad \mu, \alpha = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{14}$$

Оператор R_μ задовольняє такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} &[R_\mu, R_\nu] = iJ_{\mu\nu}(P_\alpha P^\alpha); \\ &[J_{\mu\nu}, R_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}R_\mu - g_{\mu\lambda}R_\nu); \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}). \\ &\mu, \nu \ldots = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{15}$$

Введемо такі інтегральні оператори

$$J_{\mu 5} = \frac{R_\mu}{\sqrt{P_\alpha P^\alpha}}, \tag{16}$$

які задовольняють співвідношення

$$[J_{\mu 5}, J_{\nu 5}] = iJ_{\mu\nu}. \tag{17}$$

Із (15)—(17) випливає, що оператори $J_{\mu\nu}$, $J_{\mu 5}$ задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи $SO(1, 5)$ — групи обертань в $(1+5)$-вимірному просторі Мінковського. Теорему доведено.

Цілком аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо на множині розв'язків рівнянь* (1) *і* (2) *виконується умова* $p_\mu^2 < 0$, *то ці рівняння інваріантні відносно груп* $SO(2, 3)$ *і* $SO(2, 4)$ *відповідно.*

Всі знайдені вище типи інваріантності рівнянь обумовлені перетвореннями просторово-часових координат. Виявляється, системі рівнянь (2) властивий ще один тип симетрії, обумовлений перетворенням тільки компонент хвильової функції $\Psi(\tau, x)$. Базисні елементи алгебри інваріантності Q_A в цьому випадку також є інтегродиференціальними операторами.

Теорема 5. *Рівняння* (2) *інваріантне відносно групи* $SO(1, 3)$, *причому базисні елементи алгебри Лі визначаються формулами*

$$S'^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + \xi^{\mu\nu}(p), \tag{18}$$

де

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu, \qquad \xi^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu)\frac{1}{p^2}(i\gamma_5 m - \widehat{M}),$$

$$\mu \neq \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{19}$$

Доведення. Для доведення теореми перейдемо від диференціального рівняння (2) до еквівалентного йому інтегродиференціального рівняння [6, 7, 8]. Цей перехід здійснюється за допомогою оператора

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + i\gamma_5\frac{\widehat{M}}{m}\right); \qquad W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - i\gamma_5\frac{\widehat{M}}{m}\right);$$

$$m = \{M^2\}^{1/2}; \qquad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \tag{20}$$

Оператор W використовувався в роботі [9,10] для зовсім інших цілей.

Після перетворення (20) рівняння (2) набирає вигляду

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = i\gamma_5 m \Phi; \qquad \Phi = W\Psi. \tag{21}$$

Умова інваріантності (6) має тепер вигляд

$$\left[i \frac{\partial}{\partial \tau} - i\gamma_5 m, Q_A^{\Phi} \right]_- \Phi = 0, \qquad Q_A^{\Phi} = W Q_A W^{-1}. \tag{22}$$

З формули (22) видно, що всі ті чотирирядні матриці, котрі комутують з матрицею γ_5, утворюють алгебру інваріантності рівняння (21). Базисними елементами цієї алгебри є матриці

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{23}$$

Якщо тепер над матрицями (23) здійснити обернене перетворення W^{-1}, то одержимо інтегральні оператори (19), що утворюють алгебру Лі групи SO (1, 3). Теорему доведено.

В зв'язку з попередніми результатами цікаво було б дослідити групи симетрії рівнянь типу (1) і (2) з потенціалом $V(x_\mu x^\mu)$. Без доведення наведемо таке твердження.

Теорема 6. *Рівняння* $i \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \mathcal{H} \varphi(\tau, x)$ *де* $\mathcal{H} = -\frac{1}{l} p_\alpha p^\alpha + V(x)$, $V(x) = (x_\alpha x^\alpha)^{-1/2}$, *інваріантне відносно групи* $SO(1,4)$, *якщо* $\mathcal{H} < 0$, *і групи* $SO(2,3)$, *якщо* $\mathcal{H} > 0$.

Зауваження 3. Якщо розв'язки рівняння (2) підкорити релятивістськи-інваріантній умові

$$i \frac{\partial \psi(\tau, x)}{\partial \tau} = \varkappa \psi(\tau, x) \tag{24}$$

$\varkappa$ — фіксована маса частинки, то система рівнянь (2), (24) співпаде із звичайним рівнянням Дірака. Важливо при цьому підкреслити, що алгеброю інваріантності системи (2), (24) також буде алгебра Лі групи SO (1, 3), базисними елементами якої будуть уже не інтегральні, а диференціальні оператори, оскільки в (19), згідно з (24), потрібно покласти $p^2 = \varkappa^2$ і $m = \varkappa$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Niederer U., The Maximal Kinematical Invariance Group of the Free Schroedinger Equation.— Helv. Phys. Acta, 1972, 45, N 5, p. 802—810.
2. Andersson R. L., Kumei S., Wulfman C. E. Invariants of the Equations of Vave Mechanics.— Rew. Mex. Phys., 1972, 21, N 1, p. 1—35.
3. Boyer C. P., Kalnins E. G., Miller W., Jr., Lie Theory and Separation of Variables.— J. Math. Phys. 1975, 16, N 3, p. 499—511.
4. Aghassi J. J., Roman P., Santilli R. M., New Dynamical Group for Relativistic Quantum mechanics.— Phys. Rev. D, 1970, 1, N 10, p. 2753—2765.
5. Фущич В. И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе.— ТМФ, 1970, 4, N 3, с. 361—382.
6. Fushchich V. I., On the Additional Invariance of the Dirac and Maxwell Equations.— Lett. Nuovo Cim., 1974, 11, N 10, p. 508—512.
7. Фущич В. И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения.— ТМФ, 1971, 7, № 1, с. 3—12.
8. Fushchich V. I., On the Additional Invariance of the Relativistic Equations of Motion.— Preprint ITP-70-32, Kiev, 1970, 17 p.
9. Chakrabarti A., Canonical Form of the Covariant Free—Particle Equations. —J. Math. Phys., 1963, 4, N 10, p. 1215—1222.

10. Johnson J., Chang K. K., Exact Diagonalisation of the Dirac Hamiltonian in an External Field.— Phys. Rev. D, 1974, **10**, N 8, p. 2421—2430.

Інститут математики
АН УРСР

Надійшла до редакції
26.II 1976 р.