УДК 517.5

В. Г. Хриптун

Доповнення до однієї теореми С. Мандельбройта

Теорема С. Мандельбройта [1] про те, що нескінченно диференційовна на замкненому відрізку функція є сумою функцій, кожна з яких належить своєму квазіаналітичному класові функцій, переноситься на функції декількох змінних, нескінченно диференційовні на замкненому брусі (див. [2]). У цій замітці виділяються класи таких нескінченно диференційовних функцій декількох змінних, які задані в областях більш складних, ніж брус, і є там сумою функцій, що належать квазіаналітичним класам.

1. Побудуємо квазіаналітичні класи функцій. Нехай G — довільна зв'язна область в n-вимірному просторі точок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $M_i(k)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ — послідовності додатних чисел. Функцію $f(x)$, задану і нескінченно диференційовну в області G, відносимо до класу $C_n\{M_i(k)\}$, якщо $f(x)$ в кожній замкненій області $g \subset G$ задовольняє нерівність

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n} f(x)\right| \leqslant \prod_{i=1}^{n} C_i^{k_i} M_i(k_i), \tag{1}$$

де сталі C_i залежать від $f(x)$ і області g. Клас функцій $C_n\{M_i(k)\}$ квазіаналітичний, якщо в ньому нема функції, відмінної від тотожного нуля і такої, що дорівнює нулеві разом з усіми своїми частинними похідними в деякій точці області G. Покладемо для $i = 1, 2, \ldots, n$

$$A_i = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{M_i(k)/k!}; \qquad B_i = \sum_{k=1}^{\infty} M_i^c(k-1)/M_i^c(k),$$

де $\ln M_i^c(k)$ — ордината в точці k ламаної Ньютона, побудованої для послідовності точок $(k, \ln M_i(k))$.

Теорема 1. *Клас функцій $C_n\{M_i(k)\}$ квазіаналітичний тоді і тільки тоді, коли виконується одна із таких трьох умов:* 1) $A_i < +\infty$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n$; 2) $A_i = B_i = \infty$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n$; 3) $A_i < +\infty$ *для* $i \in (i_1, i_2, \ldots, i_q) \subset (1, 2, \ldots, n)$, $(q < n)$, $A_i = B_i = \infty$ *для* $i \in (1, 2, \ldots, n) \setminus (i_1, i_2, \ldots, i_q)$.

Доведення. Необхідність цих умов відома (див. [3, с. 105; 4, 5]). Достатня умова 1) доводиться з допомогою формули Тейлора (див. [3, с. 111]). Достатня умова 2) доводиться так. Нехай $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ і $\Delta(\alpha, \beta) = \{\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ — замкнений брус в області G; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — натуральні числа і $\zeta_{j,k}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, q_k,$ $k = 1, 2, \ldots, n)$ — довільні точки відрізків $[\alpha_k, \beta_k]$, причому $\zeta_{0,k} = x_k$, $\zeta_{q_k k} = a_k$. За точками $\zeta_{j,1} \in \Delta(\alpha, \beta)$ будуємо для функції $f(x)$ формулу Банга по змінній x_1 [3, с. 110]:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q_1-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k f(a_1, x_2, \ldots, x_n)\, \varphi_{1,k}(x_1) + R(q_1, f), \tag{2}$$

де функції $\varphi_{1,k}(x_1)$ і залишковий член $R(q_1, f)$ залежать від точок $\zeta_{j,1}$. Тепер за точками $\zeta_{j,2}$ будуємо для функцій $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k f(a_1, x_2, \ldots, x_n)$ формули Банга по змінній x_2 і одержуємо, що

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_{1,k}(x_1) \sum_{r=0}^{q_2-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k f(a_1, a_2, x_3, \ldots, x_n)\, \varphi_{2,r}(x_2) +$$

$$+ R(q_1, f) + \sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_{1,k}(x_1)\, R\left(q_2, \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k f\right). \tag{3}$$

Продовжуючи цю побудову далі, на n-му кроці прийдемо до формули виду:

$$f(x) = L\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n} f(a)\right\} + N\left\{R(q_1, f),\ R\left(q_2, \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k f\right), \ldots,\right.$$

$$\left. R\left(q_n, \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)^{k_{n-1}} f\right)\right\}, \tag{4}$$

де L і N — однорідні лінійні функції своїх аргументів.

Якщо функція $f(x)$ класу $C_n\{M_i(k)\}$ дорівнює нулеві в точці $x = a$ разом з усіми своїми частинними похідними і виконується умова 2) теореми, то $L\{\ldots\} = 0$ і для кожного $\varepsilon > 0$ можна вказати такі числа $q_1, \ldots, q_n$ і точки $\zeta_{j,k}$ (аналогічно роботі [3, с. 112]), що $|N\{\ldots\}| < \varepsilon$, тобто $|f(x)| < \varepsilon$ на $\Delta(\alpha, \beta)$. Оскільки ε — довільне число, то $f(x) \equiv 0$ на $\Delta(\alpha, \beta)$. Звідси вже випливає, що умова 2) достатня для квазіаналітичності класу $C_n\{M_i(k)\}$ функцій $f(x)$, заданих в області G [3, с. 111 — 116]. Достатня умова 3) доводиться аналогічно, тільки в формулах (2), (3) і (4) для функції $f(x)$ і її частинних похідних замість формул Банга будуємо формули Тейлора по тих змінних x_i, у яких $i = i_1, i_2, \ldots, i_q$. Теорему доведено.

2. Нехай $M(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ($k_i = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n$) — послідовність додатних чисел. Функція $h(y) \equiv h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ належить класові $C\{M(k_1, \ldots, k_n)\}$ в зв'язній області G, якщо $h(y)$ нескінченно диференційовна в G і в кожній замкненій області $g \subset G$ задовольняє нерівність

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{k_n} h(y)\right| \leqslant C_1^{k_1} \cdots C_n^{k_n} M(k_1, \ldots, k_n), \tag{5}$$

де сталі C_i залежать від $h(y)$ і області g. Якщо в нерівностях (1) і (5) сталі C_i не залежать від областей $g \subset G$, то класи $C_n\{M_i(k)\}$ і $C\{M(k_1, \ldots, k_n)\}$ позначаємо $C_n^*\{M_i(k)\}$ і $C^*\{M(k_1, \ldots, k_n)\}$. Зв'язну область G позначаємо $G(\varepsilon)$, якщо її можна покрити брусами $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta) = \{\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i,\ \beta_i - \alpha_i = \varepsilon > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, які містяться в замиканні G. Очевидно, що весь n-вимірний простір є областю $G(\varepsilon)$ для довільного числа $\varepsilon > 0$.

Теорема 2. *Задана в n-вимірній області $G(\varepsilon)$ функція $h(y)$ класу $C^*\{M(k_1, \ldots, k_n)\}$ є сумою 2^n функцій $h_s(y)$ ($s = 1, 2, \ldots, 2^n$), кожна з яких в області $G(\varepsilon)$ належить своєму квазіаналітичному класові $C_n^*\{M_{i,s}(k)\}$, який визначається сукупністю логарифмічно випуклих по k послідовностей додатних чисел $M_{i,s}(k)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).*

Доведення. Покриваємо область $G(\varepsilon)$ брусами $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$ $(0 < \varepsilon \leqslant 2)$, які містяться в замиканні $G(\varepsilon)$. Елементом функції $h(y)$ на брусі $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta) \subset G(\varepsilon)$ назвемо задану тільки на цьому брусі функцію $h(\alpha, \beta; y) = h(y)$ для $y \in \Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$. Функції $h(\alpha, \beta; y)$ виражаються через функцію $h(y)$ за стандартною формулою $h(\alpha, \beta; y) = h[\alpha + (\beta - \alpha)(x + 1)/2]$, де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta(-1,1) = \{-1 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1,2, \ldots, n\}$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$, $y = \alpha + (\beta - \alpha)(x + 1)/2$, тобто $y_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)(x_i + 1)/2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Перетворення, яке переводить елемент функції $h(y)$ на брусі $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$ в елемент $h(y)$ на брусі $\Delta_\varepsilon(\gamma, \delta)$, рівносильне граничному переходові: якщо $\alpha \to \gamma$, $\beta \to \delta$, то функція $h(\alpha, \beta; y) \to h(\gamma, \delta; y)$. Розглянемо функцію $f(\alpha, \beta; x) = h[\alpha + (\beta - \alpha)(x + 1)/2] \equiv h(\alpha, \beta; y)$, де $x \in \Delta(-1,1)$, $y = \alpha + (\beta - \alpha)(x + 1)/2$. Оскільки

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n} f(\alpha, \beta; x) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k_1 + \ldots + k_n} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{k_n} h(\alpha, \beta; y), \quad (6)$$

то функція $f(\alpha, \beta; x)$ на брусі $\Delta(-1,1)$ належить класові $C^*\{M(k_1, \ldots, k_n)\}$ і задовольняє нерівність (5) з тими ж сталими $C_1, C_2, \ldots, C_n$, що і функція $h(\alpha, \beta; y)$. Для $x \in \Delta(-1,1)$ функція $f(\alpha, \beta; x)$ розвивається в n-кратний ряд за многочленами Чебишова $T_k(z) = \cos(k \arccos z)$:

$$f(\alpha, \beta; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\alpha, \beta)\, T_\nu(x), \quad (7)$$

де $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ і кожний індекс $\nu_i \in \nu$ змінюється від нуля до нескінченності, $T_\nu(x) = T_{\nu_1}(x_1)\, T_{\nu_2}(x_2) \ldots T_{\nu_n}(x_n)$, $a_\nu(\alpha, \beta)$ — коефіцієнти Фур'є функції $h[\alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1)(\cos t_1 + 1)/2, \ldots, \alpha_n + (\beta_n - \alpha_n)(\cos t_n + 1)/2]$, $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Delta(-\pi, \pi)$. Згідно з [2] функція $f(\alpha, \beta; x)$ є сумою функцій $f_s(\alpha, \beta; x)$, $(s = 1, 2, \ldots, 2^n)$, кожна з яких в області $\Delta(-1,1)$ належить квазіаналітичному класові $C_n^*\{M_{i,s}(k)\}$ і зображується n-кратним рядом вигляду:

$$f_s(\alpha, \beta; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu,s}(\alpha, \beta)\, T_\nu(x), \quad (8)$$

де коефіцієнти $b_{\nu,s}(\alpha, \beta) = a_\nu(\alpha, \beta)$ для деяких номерів $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ (своїх для кожного s) і $b_{\nu,s}(\alpha, \beta) = 0$ для інших номерів. Спосіб розбиття ряду (7) на ряди (8), вказаний в роботах [1,2], визначається тільки послідовністю чисел $M(k_1, \ldots, k_n)$ і сталими C_i з нерівностей (5) і не залежить від α і β. Послідовності $M_{i,s}(k)$, що характеризують класи $C_n^*\{M_{i,s}(k)\}$, визначаються послідовністю $M(k_1, \ldots, k_n)$ і також не залежать від α і β. Звідси випливає, що для кожного s структура рядів (8) (тобто номери ν, для яких $b_{\nu,s}(\alpha, \beta) = a_\nu(\alpha, \beta)$, і номери ν, для яких $b_{\nu,s}(\alpha, \beta) = 0$) одна і та ж для всіх α і β. Частинні похідні функцій $f_s(\alpha, \beta; x)$ обчислюються почленним диференціюванням рядів (8) і всі одержані таким шляхом ряди збігаються рівномірно щодо α, β і x (див. [1, 2]). Для кожного s на брусі $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta) \subset G(\varepsilon)$ будуємо функцію $h_s(\alpha, \beta; y) \equiv h_s[\alpha + (\beta - \alpha)(x + 1)/2] = f_s(\alpha, \beta; x)$, де $y = \alpha + (\beta - \alpha)(x + 1)/2$. Із вказаних властивостей рядів (8) і рівностей (6) для функцій $f_s(\alpha, \beta; x)$ і $h_s(\alpha, \beta; y)$ випливає, що на брусі $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$ функція $h_s(\alpha, \beta; y)$ належить класові $C_n^*\{M_{i,s}(k)\}$ і задовольняє нерівність (1) з сталими C_1, що не залежать від α і β. Нехай функції $h_s(\alpha, \beta; y)$ і $h_s(\gamma, \delta; y)$ задані на брусах $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta) \subset G(\varepsilon)$ і $\Delta_\varepsilon(\gamma, \delta) \subset G(\varepsilon)$ і $\alpha_i < \gamma_i < \beta_i < \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тоді на брусі $\Delta(\gamma, \beta) = \Delta_\varepsilon(\alpha, \beta) \cap \Delta_\varepsilon(\gamma, \delta)$ елементом функції $h_s(\alpha, \beta; y)$ є границя ряду (8) при $\alpha \to \gamma$, а елементом функції $h_s(\gamma, \delta; y)$ — границя при $\delta \to \beta$ ряду (8) з коефіцієнтами $b_{\nu,s}(\gamma, \delta)$. Оскільки структура рядів (8) одна і та ж для всіх α і β, то елементи функцій $h_s(\alpha, \beta; y)$ і $h_s(\gamma, \delta; y)$ збігаються на брусі $\Delta(\gamma, \beta)$. Справді, граничний перехід $\alpha \to \gamma$ в ряді (8) з коефіцієнтами $b_{\nu,s}(\alpha, \beta)$ і $\delta \to \beta$ в ряді (8) з коефіцієнтами $b_{\nu,s}(\gamma, \delta)$ можна проводити почленно, тобто безпосередньо в коефіцієнтах $b_{\nu,s}(\alpha, \beta)$ і $b_{\nu,s}(\gamma, \delta)$. Для кожного номера $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ функції $b_{\nu,s}(\alpha, \beta)$ і $b_{\nu,s}(\gamma, \delta)$ або одночасно дорівнюють нулеві, або $b_{\nu,s}(\alpha, \beta) = a_\nu(\alpha, \beta)$, $b_{\nu,s}(\gamma, \delta) = a_\nu(\gamma, \delta)$, де $a_\nu(\alpha, \beta)$ — коефіцієнт Фур'є функції $h[\alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1)(\cos t_1 + 1)/2, \ldots, \alpha_n + (\beta_n - \alpha_n)(\cos t_n + 1)/2]$,

$a_\nu(\gamma, \delta)$ — коефіцієнт Фур'є функції $h[\gamma_1 + (\delta_1 - \gamma_1)(\cos t_1 + 1)/2, \ldots, \gamma_n + (\delta_n - \gamma_n)(\cos t_n + 1)/2]$ і h — функція нашої теореми. Отже, $\lim\limits_{\alpha\to\gamma} b_{\nu,s}(\alpha,\beta) = \lim\limits_{\delta\to\beta} b_{\nu,s}(\gamma, \delta)$ і $h_s(\alpha, \beta; y) = h_s(\gamma, \delta; y)$ на брусі $\Delta(\gamma, \beta)$.

Ми показали, що функція $h_s(\gamma, \delta; y)$ є квазіаналітичним продовженням (із збереженням класу квазіаналітичності) функції $h_s(\alpha, \beta; y)$ із області $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$ в область $\Delta_\varepsilon(\gamma, \delta)$.

Візьмемо тепер довільний брус $\Delta_\varepsilon(\sigma, \tau) \subset G(\varepsilon)$, який не налягає на брус $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$, і побудуємо в області $G(\varepsilon)$ скінченну кількість налягаючих один на одного брусів $\Delta_\varepsilon(\alpha^{(i)}, \beta^{(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, таких, що перший з них налягає на брус $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$, а останній — на брус $\Delta_\varepsilon(\sigma, \tau)$. Повторюємо наші міркування для кожної пари брусів, починаючи з пари $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$, $\Delta_\varepsilon(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$ і кінчаючи парою $\Delta_\varepsilon(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)})$, $\Delta_\varepsilon(\sigma, \tau)$ і приходимо до висновку, що функція $h_s(\sigma, \tau; y)$, задана на брусі $\Delta_\varepsilon(\sigma, \tau)$, є квазіаналітичним продовженням функції $h_s(\alpha, \beta; y)$ з бруса $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$ на брус $\Delta_\varepsilon(\sigma, \tau)$ із збереженням класу квазіаналітичності. При цьому, як уже було вказано, функція $h_s(\sigma, \tau; y)$ на брусі $\Delta_\varepsilon(\sigma, \tau)$ задовольняє ті ж оцінки (1), що і функція $h_s(\alpha, \beta; y)$ на брусі $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$ з послідовністю чисел $M_{i,s}(k)$ (замість $M_i(k)$) і сталими C_i, що не залежать від $\alpha, \beta, \sigma, \tau$, а тільки від функції $h(y)$, з допомогою якої побудовано функції $h_s(\alpha, \beta; y)$ і $h_s(\sigma, \tau; y)$.

Звідси випливає, що сукупність функцій $h_s(\alpha, \beta; y)$, заданих на брусах $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta)$, які покривають область $G(\varepsilon)$ і містяться в замиканні $G(\varepsilon)$, визначає в області $G(\varepsilon)$ функцію $h_s(y)$, яка належить квазіаналітичному класові $C_n^*\{M_{i,s}(k)\}$, причому в області $G(\varepsilon)$ функція $h(y)$ класу $C^*\{M(k_1, \ldots, k_n)\}$ дорівнює сумі даних функцій $h_s(y)$ $(s = 1, 2, \ldots, 2^n)$. Теорему доведено.

Теорема 3. *Для класу $C\{M(k_1, \ldots, k_n)\}$ функцій $h(y)$, заданих в довільній зв'язній області G, можна побудувати такі квазіаналітичні класи $G_n\{M_{i,s}(k)\}$ функцій $h_s(y)$ $(s = 1, 2, \ldots, 2^n)$, що для кожної обмеженої замкненої області $g \subset G$ і кожної функції $h(y) \in C\{M(k_1, \ldots, k_n)\}$ в класах $C_n\{M_{i,s}(k)\}$ є функції $h_s(y)$, сума яких дорівнює $h(y)$ в області $g \subset G$.*

Доведення випливає із теореми 2, бо замкнену обмежену область $g \subset G$ можна покрити брусами $\Delta_\varepsilon(\alpha, \beta) \subset G$ при деякому $\varepsilon > 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Mandelbrojt S. Sur les fonctions indéfiniment dérivables.— Acta Math., 1940, **72.**
2. Хрыптун В. Г. Об одном представлении бесконечно дифференцируемых функций. — ДАН СССР, 1971, **199**, № 2.
3. Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., Из-во иностр. лит., 1955.
4. Мацаев В. И., Ронкин Л. И. Квазианалитические классы функций от нескольких переменных, Записки мат. отделения физ.-мат. фак. и Харьковск. мат. об-ва, сер. 4, 1961, **27**.
5. Ронкин Л. И. О квазианалитических классах функций нескольких переменных.— ДАН СССР, 1962, **146**, **№ 3.**

Івано-Франківський
педагогічний інститут

Надійшла до редакції
21.IV 1975 р.