УДК 517.947

М. М. Ч а у с

Теорема про поведінку на нескінченності розв'язків рівняння в частинних похідних

Розглядається рівняння

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} = \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} Q_1 u + \ldots + \frac{\partial}{\partial x} Q_{p-1} u + Q_p u, \tag{1}$$

де Q_k — диференційний вираз від $\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ зі сталими коефіцієнтами, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$. Нехай $u = u(x, t, y) = u(x, t_1, \ldots, t_m, y_1, \ldots, y_n)$ розв'язок рівняння (1), визначений в області $x > 0$, $0 \leqslant t_k \leqslant 1$ $(k = 1, \ldots, m)$, $-\infty < y_s < \infty$ $(s = 1, \ldots, n)$. Ми сформулюємо обмеження на поведінку розв'язку u на нескінченності, з яких буде випливати $u \equiv 0$. Одержанням таких умов на розв'язки диференціальних рівнянь і систем займались ряд авторів [1 — 5]

Насамперед введемо для виразу Q_k $(k = 1, \ldots p)$ потрібну нам характеристику $r_k(\lambda)$ $(0 < \lambda \leqslant 1)$. Для випадку

$$Q_k = a\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)^{i_m} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{j_n} \quad (a \text{ — const})$$

$r_k(\lambda)$ визначається так:

$$r_k(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{m} i_\nu + \lambda \sum_{\nu=1}^{n} j_\nu.$$

Якщо Q_k є сума N таких доданків, то для кожного з них потрібно підрахувати $\sum_\nu i_\nu + \lambda \sum_\nu j_\nu$ і серед одержаних N чисел вибрати найбільше. Це і буде, за визначенням, $r_k(\lambda)$. Зокрема, $r_k(1)$ є порядок диференційного виразу Q_k по сукупності змінних, а введення $r_k(\lambda)$ зумовлено нерівноправністю змінних t і y.

Для $q > 1$ вводиться характеристика R_q рівняння (1):

$$R_q = r_1\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{2} r_2\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \ldots + \frac{1}{p} r_p\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Теорема. *Нехай* $q > 1$ *таке, що* $R_q < 1$ *і* $q_1 = \frac{1}{1 - R_q}$. *Нехай* $u(x, t, y)$ — *розв'язок рівняння* (1), *визначений в області*:

$$x > 0,\ 0 \leqslant t_k \leqslant 1\ (k = 1, \ldots, m),\ -\infty < y_s < \infty \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Якщо мають місце нерівності

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right| \leqslant C \exp\{-x^{q_1+\varepsilon} + a \|y\|^q\} \quad (i = 0, 1, \ldots, p-1)$$

з деякими $C, a, \varepsilon > 0$, $\|y\|^2 = \sum_i |y_i|^2$, *то* $u(x, t, y) \equiv 0$.

Приклади. Застосуємо теорему до конкретних рівнянь і випишемо відповідні оцінки для $\left|\frac{\partial^i u}{\partial x_i}\right|$, з яких буде випливати $u \equiv 0$.

$$1.\ \ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^p u}{\partial x^p} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ x > 0,\ p > 1),$$

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right| \leqslant C \exp\{-x^{p'+\varepsilon}\} \quad \left(i = 0, 1, \ldots, p-1;\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

$$2.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} = 0 \quad (x > 0,\ -\infty < y_j < \infty),$$

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right| \leqslant C \exp\{-x^{1+\varepsilon} + a\|y\|\} \quad (i = 0, 1).$$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^p u}{\partial y^p} \quad (x > 0, \ -\infty < y < \infty),$

$$|u| \leqslant C \exp\{-x^{\frac{q}{q-p}+\varepsilon} + a|y|^{q'}\}.$$

В останній нерівності можна брати довільне $q > p$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Доведення теореми подамо для простого випадку рівняння (1), а саме для рівняння

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} Q_{p-k} u \equiv \frac{\partial^{k+i+j}}{\partial x^k \partial t^i \partial y^j} u.$$

Суттєву роль в доведенні відіграють спеціальні функції $\varphi(y)$ і $\omega(t)$. Нехай $\varphi(y)$ — нескінченно диференційовна на всій осі функція, для якої

$$|\varphi^{(k)}(y)| \leqslant Ck^{\left(1-\frac{1}{q}\right)k} \exp\{-b|y|^q\} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Такі нетривіальні $\varphi(y)$ існують при $q > 1$ і $b > 0$ [6]. Нехай $\omega(t)$ — нескінченно диференційовна на $[0, 1]$ функція, для якої $\omega^{(k)}(0) = \omega^{(k)}(1) = 0$ і $|\omega^{(k)}(t)| \leqslant Ck^{(1+\delta)k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. При довільному $\delta > 0$ $\omega(t) \not\equiv 0$ існують [7].

Нехай тепер $u(x, t, y)$ — розв'язок нашого рівняння, і для нього виконуються умови теореми. Розглянемо функцію

$$f(x) = (u, \varphi \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 u(x, t, y) \varphi(y) \omega(t) \, dt dy,$$

вважаючи, що $\varphi(y)$ достатньо швидко прагне до нуля на ∞ за рахунок b. Ми можемо зразу одержати вирази для похідних від $f(x)$. Наприклад, $f^{(p)}(x) = \left(\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}, \widetilde{Q}_{p-k}\varphi \cdot \omega\right)$, де $\widetilde{Q}_{p-k}$ — формально спряжений вираз до Q_{p-k}. І взагалі, можна встановити, що $f(x)$ — нескінченно диференційовна функція, і що для довільного $m = 0, 1, \ldots$

$$f^{(m)}(x) = \left(\frac{\partial^s u}{\partial x^s}, \widetilde{Q}^{\mu}_{p-k}\varphi \cdot \omega\right),$$

де для $m \geqslant p$ числа s і μ визначаються з умов: $\mu(p-k) + s = m$, $k \leqslant s < p$. При великих m маємо $\mu \approx \dfrac{m}{p-k}$ і має місце така оцінка.

$$|\widetilde{Q}^{\mu}_{p-k}\varphi\omega| = |\varphi^{(\mu j)}(y) \cdot \omega^{(\mu i)}(t)| \leqslant C_0 C_1^{\mu} \mu^{\left(1-\frac{1}{q}\right)\mu j + (1+\delta)\mu i} \exp\{-b|y|^q\} \leqslant$$

$$\leqslant C_0 C_2^m m^{\left[\left(1-\frac{1}{q}\right)j+i\right]m+\delta_1 m} \exp\{-b|y|^q\} = C_0 C_2^m m^{m(R_q+\delta_1)} \exp\{-b|y|^q\}.$$

Звідси, використовуючи відомості про розв'язок $u(x, t, y)$, одержуємо оцінки для $|f^{(m)}(x)|$:

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant CC_2^m m^{m(R_q+\delta_1)} \exp\{-x^{q_1+\varepsilon}\} \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

де, згідно з теоремою, $R_q < 1$, $q_1 = \dfrac{1}{1-R_q}$ і $\varepsilon > 0$. В одержаній формулі $\delta_1 = \dfrac{i\delta}{p-k} > 0$ і може вважатись достатньо малим порівняно з $\varepsilon > 0$. Але тоді $f(x) \equiv 0$, що випливає, наприклад, з [8].

Отже, доведено, що $f(x) = (u, \varphi \cdot \omega) \equiv 0$. Тепер треба зауважити, що функцій $\varphi(y)$ і $\omega(t)$ з потрібними нам властивостями існує багато. Звідси $u \equiv 0$, що і потрібно було довести.

ЛІТЕРАТУРА

1. Эйдельман С. Д. Теоремы типа Лиувилля для параболических и эллиптических систем.— ДАН СССР, 1954, **99**, № 5, с. 681—684.
2. Ландис Е. М. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений.— ДАН СССР, 1956. **107**, № 5, с. 640—643.
3. Аршон И. С., Пак М. А. Теоремы единственности для гармонических функций в полупространстве.— Мат. сб., 1965, **68**, № 1, с. 148—151.
4. Пак М. А. Об убывании решений линейных эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами.— Мат. сб., 1969, **78**, № 3, с. 355—359.
5. Дехтярюк Е. С. Асимптотические теоремы единственности решения системы дифференциальных уравнений в полупространстве.— Допов. АН УРСР, 1969, № 12, с. 1069—1073.
6. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 2.— М., Физматгиз, 1958, 362 с.
7. Мандельбройт С. Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения.— М., Изд-во иностр. лит. 1955, 268 с.
8. Мандельбройт С. Теоремы замкнутости и теоремы композиции.— М., Изд-во иностр. лит., 1962, 180 с.

Інститут математики АН УРСР

Надійшла до редакції
13.VI 1975 р.