УДК 517.948.513.88

И. М. Ковальчик

О линейных уравнениях с функциональными производными

1. Пусть X — линейное нормированное пространство функций одной вещественной переменной, R — числовая ось и $J(x): X \to R$. Функциональная производная n-го порядка от функционала $J(x)$ по x, вычисленная в точках $t_1, \ldots, t_n \in [a, b] \subset R$, обозначается символом $\frac{\delta^n J(x)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_n)}$ (определения см. в [1, 2]). При этом для определенности будет предполагаться, что $\frac{\delta^n J(x)}{\delta x(\cdot), \ldots \delta x(\cdot)} \in L_2(G_n)$, где $G_n = \underbrace{[a, b] \times \ldots \times [a, b]}_{n}$.

Пусть дано линейное уравнение n-го порядка с функциональными производными вида

$$p_0(x) \frac{\delta^n J(x)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_n)} + p_1(x, t_n) \frac{\delta^{n-1} J(x)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{n-1})} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(x, t_2, \ldots, t_n) \frac{\delta J(x)}{\delta x(t_1)} + p_n(x, t_1, \ldots, t_n) J(x) = q(x, t_1, \ldots, t_n). \tag{1}$$

В статье дается решение уравнения (1), а также исследованы некоторые свойства уравнения более простого вида, аналогичные свойствам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Решение уравнения (1) в отдельных частных случаях, которые будут приведены ниже в качестве примеров, рассматривались в [3—5].

Теорема 1 данной статьи анонсирована без доказательства в [6].

Уравнение (1) называется вполне разрешимым в точке $x_0 \in X$, если найдется такая открытая окрестность S точки x_0, что существует единственное решение уравнения (1), определенное в S и удовлетворяющее начальным условиям

$$J(x_0) = a_0, \ \frac{\delta^k J(x_0)}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_k)} = a_k(t_1, \ldots, t_k) \quad (k = \overline{1, n-1}) \tag{2}$$

при $\forall a_0$ и $\forall a_k(t_1, \ldots, t_k)$.

Уравнение (1) называется вполне разрешимым в области $D \subset X$, если оно вполне разрешимо в каждой точке $x \in D$.

Специфический вид коэффициентов уравнения (1) тесно связан с условиями полной разрешимости данного уравнения.

2. Нахождение решения (1) при условиях (2) осуществляется с помощью следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. *Пусть коэффициенты и правая часть уравнения* (1) *непрерывно дифференцируемы в слабом смысле по* $x \in D$ *и уравнение* (1) *вполне разрешимо в области* D. *Тогда в данной области существует и при том единственное решение задачи* (1), (2) *вида*

$$J(x) = \varphi\Bigg(1, x, x_0, a_0, \int_a^b a_1(t_1)[x(t_1) - x_0(t_1)]\,dt_1, \ldots$$

$$\ldots, \int_a^b \overset{(n-1)}{\ldots} \int_a^b a_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} [x(t_j) - x_0(t_j)]\,dt_j\Bigg),$$

где $\varphi(s, x, x_0, z_0, z_0', \ldots, z_0^{(n-1)}) = z(s)$ $[0 \leqslant s \leqslant 1]$ *при фиксированных* x *и* x_0 *является решением задачи*

$$f_0(s) \frac{d^n z}{ds^n} + f_1(s) \frac{d^{n-1} z}{ds^{n-1}} + \ldots + f_{n-1}(s) \frac{dz}{ds} + f_n(s) z = g(s), \tag{3}$$

$$z(0) = z_0, \quad \frac{d^k z(0)}{ds^k} = z_0^k \quad (k = \overline{1, n-1}) \tag{4}$$

и

$$f_0(s) = p_0[s(x - x_0) + x_0],$$

$$f_k(s) = \int_a^b \overset{(k)}{\ldots} \int_a^b p_k[s(x - x_0) + x_0, t_1, \ldots, t_k] \prod_{j=1}^{k} [x(t_j) - x_0(x_j)]\,dt_j$$

$$(k = \overline{1, n-1}),$$

$$g(s) = \int_a^b \overset{(n)}{\ldots} \int_a^b q[s(x - x_0) + x_0, t_1, \ldots, t_n] \prod_{j=1}^{n} [x(t_j) - x_0(t_j)]\,dt_j.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_s = s(x - x_0) + x_0$ $[0 \leqslant s \leqslant 1]$. Перепишем задачу (1), (2) в виде

$$p_0(x_s) \frac{\delta^n J(x_s)}{\delta x_s(t_1) \ldots \delta x_s(t_n)} + p_1(x_s, t_n) \frac{\delta^{n-1} J(x_s)}{\delta x_s(t_1) \ldots \delta x_s(t_{n-1})} + \ldots \tag{1'}$$

$$\ldots + p_{n-1}(x_s, t_2, \ldots, t_n) \frac{\delta J(x_s)}{\delta x_s(t_1)} + p_n(x_s, t_1, \ldots, t_n) J(x_s) = q(x_s, t_1, \ldots, t_n),$$

$$J(x_0) = a_0, \ \frac{\delta^k J(x_0)}{\delta x_s(t_1) \ldots \delta x_s(t_k)} = a_k(t_1, \ldots, t_k) \quad (k = \overline{1, n-1}) \tag{2'}$$

и положим, зафиксировав x и x_0,

$$J(x_s) = J[s(x - x_0) + x_0] = z(s) \quad [0 \leqslant s \leqslant 1].$$

Дифференцирование функционала $J(x_s)$ по параметру s дает

$$\frac{\partial^k J(x_s)}{\partial s^k} = \int_a^b \overset{(k)}{\dots} \int_a^b \frac{\delta^k J(x_s)}{\delta x_s(t_1)\dots\delta x_s(t_k)} \prod_{j=1}^{k} [x(t_j) - x_0(t_j)]\, dt_j. \tag{5}$$

Если умножить обе части уравнения (1′) на $\prod_{j=1}^{n}[x(t_j) - x_0(t_j)]$, проинтегрировать по $t_1, \dots, t_n$, то на основании (5) получается уравнение (3). При этом $z(1) = J(x)$ и $z(0) = J(x_0) = a_0$.

Еще раз используем равенство (5):

$$\frac{d^k z(0)}{ds^k} = \int_a^b \overset{(k)}{\dots} \int_a^b a_k(t_1, \dots, t_k) \prod_{j=1}^{k} [x(t_j) - x_0(t_j)]\, dt_j \quad (k = \overline{1, n-1}).$$

Учитывая условия (4), обозначим решение задачи (3), (4) на сегменте $[0, 1]$ через $z(s) = \varphi(s, x, x_0, z_0, z_0', \dots, z_0^{(n-1)})$. Решение данной задачи существует и единственно, потому что коэффициенты и правая часть уравнения (3) — непрерывные функции аргумента s.

Так как $J(x) = z(1)$, отсюда вытекает требуемое утверждение.

Замечание 1. Решение задачи (1), (2) можно получить тем же методом и тогда, когда функциональные производные, входящие в это уравнение, являются обобщенными функциями параметров $t_1, \dots, t_n$. Необходимо только вместо выражений $\int_a^b \overset{(k)}{\dots} \int_a^b \frac{\delta^k f(x)}{\delta x(t_1)\dots\delta x(t_k)} x(t_1)\dots x(t_k)\, dt_1 \dots dt_k$ писать $\left\langle \frac{\delta^k f(x)}{\delta x(t_1)\dots\delta x(t_k)},\ x(t_1)\dots x(t_k) \right\rangle$ (см. [1, 2]).

Замечание 2. Данный метод применим и к решению некоторых классов квазилинейных уравнений, например, если последний член в левой части уравнения (1) имеет вид $r(J, x, t_1 \dots, t_n)$. Для проверки этого факта следует дословно повторить приведенное выше доказательство теоремы 1.

Пример 1. Линейное уравнение первого порядка

$$\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)} + p(x, t)\, J(x) = q(x, t), \tag{6}$$

$$J(x_0) = a_0, \tag{7}$$

где $t \in [a, b]$.

Если при фиксированном значении t функционалы $p(x, t)$ и $q(x, t)$ обладают непрерывными производными первого порядка по x, то для полной разрешимости уравнения (6) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\delta p(x, t_1)}{\delta x(t_2)} = \frac{\delta p(x, t_2)}{\delta x(t_1)},$$

$$\frac{\delta q(x, t_1)}{\delta x(t_2)} + p(x, t_2)\, q(x, t_1) = \frac{\delta q(x, t_2)}{\delta x(t_1)} + p(x, t_1)\, q(x, t_2)$$

при $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$.

На основании теоремы 1

$$J(x)=\exp\left\{-\int_0^1 ds\int_a^b p\,[s(x-x_0)+x_0,\ t]\,[x(t)-x_0(t)]\,dt\right\}\times$$

$$\times\left\{a_0+\int_0^1\exp\left[s\int_0^1 ds_1\int_a^b p\,(ss_1(x-x_0)+x_0,\ \tau)\,(x(\tau)-x_0(\tau))\,d\tau\right]ds\times\right.$$

$$\left.\times\int_a^b q\,[s(x-x_0)+x_0,\ t]\,[x(t)-x_0(t)]\,dt\right\}.$$

Решение задачи (6), (7) можно искать и в классе обобщенных функций, считая, что $p(x,\ t)$ и $q(x,\ t)$ — обобщенные функции параметра t. Тогда

$$J(x)=\exp\left\{-\int_0^1\langle p\,(s(x-x_0)+x_0),\ x-x_0\rangle\,ds\right\}\times$$

$$\times\left\{a_0+\int_0^1\exp\left[s\int_0^1\langle p(ss_1(x-x_0)+x_0),\ x-x_0\rangle ds_1\right]\langle q(s(x-x_0)+x_0),\ x-x_0\rangle ds\right\}.$$

Последняя формула получена в [5] с помощью тех же приемов, что и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение задачи (6), (7) при некотором специальном выборе операции первообразного функционала дано в статье [4].

Пример 2. Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{\delta^n J(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_n)}+p_1\frac{\delta^{n-1}J(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n-1})}+\ldots+p_{n-1}\frac{\delta J(x)}{\delta x(t_1)}+p_nJ(x)=0 \tag{8}$$

при начальных условиях

$$J(x_0)=a_0,\quad \frac{\delta^k J(x_0)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_k)}=a_k\quad (k=\overline{1,\ n-1}). \tag{9}$$

Уравнение (8) вполне разрешимо в некоторой области D.

Теорема 2. *В области D полной разрешимости уравнения* (8) *существует и при том единственное решение задачи* (8), (9) *вида*

$$J(x)=\psi\left(\int_a^b[x(t)-x_0(t)]\,dt,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}\right),$$

где $\psi(\tau,\ z_0,\ z_0,\ \ldots,\ z_0^{(n-1)})=z(\tau)$ *является решением задачи*

$$\frac{d^nz}{d\tau^n}+p_1\frac{d^{n-1}z}{d\tau^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}\frac{dz}{d\tau}+p_nz=0,$$

$$z(0)=z_0,\quad \frac{d^kz(0)}{d\tau^k}=z_0^{(k)}\quad (k=\overline{1,\ n-1}).$$

Доказательство вытекает из теоремы 1, если положить, что $\tau=s\int_a^b[x(t)-$ $-x_0(t)]\,dt$.

Теорема 2 обосновывает предложенный в статье [3] метод решения линейных уравнений в функциональных производных с постоянными коэффициентами.

Пример 3. Пусть дано уравнение

$$\frac{\delta^n J(x)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_n)} = q(x, t_1, \ldots, t_n) \tag{10}$$

при начальных условиях

$$J(x_0) = a_0, \frac{\delta^k J(x_0)}{\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_k)} = a_k(t_1, \ldots, t_k) \quad (k = \overline{1, n-1}). \tag{11}$$

Если существует непрерывная по $x \in D$ производная $\dfrac{\delta q(x, t_1, \ldots, t_n)}{\delta x(t_{n+1})}$, являющаяся при каждом фиксированном значении $x \in D$ вместе с функцией $q(x, t_1, \ldots, t_n)$ симметричной функцией параметров $t_1, \ldots, t_n$, то в области D существует единственное решение задачи (10), (11). На основании теоремы 1 решение данной задачи имеет вид

$$J(x_0) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \int_a^b \overset{(k)}{\ldots} \int_a^b a_k(t_1, \ldots, t_k) \prod_{j=1}^{k} [x(t_j) - x_0(t_j)]\, dt_j +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} ds \int_a^b \overset{(n)}{\ldots} \int_a^b q[s(x - x_0) + x_0, t_1, \ldots t_n] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} [x(t_j) - x_0(t_j)]\, dt_j.$$

В другой более сложной форме и другим методом решение задачи (10), (11) получено в [3 и 5].

3. Для уравнений с функциональными производными функциональные производные от их решений, как правило, зависят от точек, в которых они вычисляются. Последнее не будет иметь места для линейных уравнений в функциональных производных с постоянными коэффициентами, а также для некоторых видов уравнений с переменными коэффициентами.

Рассмотрим систему n линейно независимых решений вполне разрешимого уравнения (1) при $q(x, t_1, \ldots, t_n) \equiv 0$. Такая совокупность функционалов называется фундаментальной системой решений данного уравнения

Если предположить, что функциональные производные до $(n-1)$-го порядка включительно от фундаментальной системы решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), не зависят от точек, в которых они вычисляются, то естественно рассматривать уравнение

$$\frac{\delta^n J(x)}{\underbrace{\delta x(\tau)\ldots\delta x(\tau)}_{n-1}\delta x(t)} + a_1(x)\frac{\delta^{n-1} J(x)}{\underbrace{\delta x(\tau)\ldots\delta x(\tau)}_{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1}(x)\frac{\delta J(x)}{\delta x(\tau)} + a_n(x) J(x) = 0, \tag{12}$$

причем $a_k(x) = \varphi_k\left[\int_a^b x(t)\, dt\right]$ $(k = \overline{1, n})$, где $\varphi_k(u)$ — обычные дифференцируемые функции.

Можно проверить, что уравнение (12) вполне разрешимо в рассматриваемой области D полной разрешимости.

Для уравнения (12) естественно вводится определитель Вронского и доказываются некоторые теоремы, связанные с этим определителем.

Очевидно, что с помощью замены $J(x) = z(\tau)$, где $\tau = \int\limits_a^b x(t)\,dt$, уравнение (12) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению, так что нахождение его решения тривиально, однако исследование свойств этого уравнения, по-видимому, не лишено интереса.

Пусть дано n функционалов $J_1(x), \ldots, J_n(x)$, обладающих функциональными производными до $(n-1)$-го порядка включительно, не зависящих от точек, в которых они вычисляются.

Определитель Вронского определяется равенством

$$W[J(x)] \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{vmatrix} J(x) & \ldots & J_n(x) \\ \dfrac{\delta J_1(x)}{\delta x(\tau)} & \ldots & \dfrac{\delta J_n(x)}{\delta x(\tau)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\delta^{n-1} J_1(x)}{\underbrace{\delta x(\tau)\ldots\delta x(\tau)}_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\delta^{n-1} J_n(x)}{\underbrace{\delta x(\tau)\ldots\delta x(\tau)}_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Теорема 3. *Если функционалы $J_1(x), \ldots, J_n(x)$ линейно зависимы то определитель Вронского для них равен нулю.*

Теорема 4. *Если решения $J_1(x), \ldots, J_n(x)$ уравнения* (12) *линейно независимы в области D полной разрешимости, то $W[J(x)]$ не обращается в нуль ни в одной точке $x \in D$.*

Доказательство этих теорем аналогично доказательству соответствующих теорем из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

По данной фундаментальной системе функционалов $J_1(x), \ldots, J_n(x)$ можно составить линейное уравнение в функциональных производных:

$$\begin{vmatrix} J_1(x) & \ldots & J_n(x) & J(x) \\ \dfrac{\delta J_1(x)}{\delta x(\tau)} & \ldots & \dfrac{\delta J_n(x)}{\delta x(\tau)} & \dfrac{\delta J(x)}{\delta x(\tau)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\delta^n J_1(x)}{\underbrace{\delta x(\tau)\ldots\delta x(\tau)}_{n-1}\delta x(t)} & \ldots & \dfrac{\delta^n J_n(x)}{\underbrace{\delta x(\tau)\ldots\delta x(\tau)}_{n-1}\delta x(t)} & \dfrac{\delta^n J(x)}{\underbrace{\delta x(\tau)\ldots\delta x(\tau)}_{n-1}\delta x(t)} \end{vmatrix} = 0.$$

Если разложить определитель в левой части уравнения (13) по элементам последнего столбца, разделить на коэффициент при $\dfrac{\delta^n J(x)}{\underbrace{\delta x(\tau)\ldots\delta x(\tau)}_{n-1}\delta x(t)}$, который равен определителю Вронского, и сравнить полученное разложение с уравнением (12), то легко видеть, что

$$a_1(x) = -\frac{\dfrac{\delta W[J(x)]}{\delta x(t)}}{W[J(x)]}.$$

При этом существенно используется тот факт, что функциональные производные до $(n-1)$-го порядка включительно не зависят от точек, в которых они вычисляются.

Уравнение

$$\frac{\delta W[J(x)]}{\delta x(t)} = -a_1(x)\,W[J(x)]$$

вполне разрешимо, если $\frac{\delta a_1(x)}{\delta x(t_1)} = \frac{\delta a_1(x)}{\delta x(t_2)}$ для $\forall t_1, \quad t_2 \in [a, b]$, что и имеет место.

Отсюда вытекает, что

$$W[J(x)] = W[J(x_0)] \exp\left\{-\int_0^1 a_1[s(x - x_0) + x_0]\, ds \int_a^b [x(t) - x_0(t)]\, dt\right\}.$$

Данная формула является аналогом формулы Остроградского—Лиувилля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними дифференциальные уравнения.— УМН, 1967, **22**, № 4, с. 3—54.
2. Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах.— УМН, 1967, **22**, № 6, с. 201—260.
3. Новиков Е. Решение некоторых уравнений с вариационными производными.— УМН, 1961, **16**, № 2, с. 135—142.
4. Татарский В. И. О первообразном функционале и его применении к интегрированию некоторых уравнений в функциональных производных.— УМН, 1961, **16**, № 4, с. 179—186.
5. Сявавко М. С. Некоторые вопросы теории уравнений в функциональных производных. Автореферат канд. дис., Львов, 1968, 12 с.
6. Ковальчик И. М. Линейные уравнения с функциональными производными.— ДАН СССР, 1970, **194**, № 4, с. 763—766.

Львовский политехнический институт

Поступила в редакцию 25.VIII 1975 г.,
после переработки — 22.XII 1975 р.