1977 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 29, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.948:513.77+519.4

Ю. М. Березанский, Т. А. Михайлюк

Об условиях самосопряженности эллиптических операторов с бесконечным числом переменных

В [1] одним из авторов установлено некоторое условие самосопряженности оператора типа Шредингера с бесконечным числом переменных, действующего в пространстве L_2 на $\mathbf{R}^\infty$ по продакт-мере. В этой заметке приводится усиление результата из работы [1] для случая гауссовской меры, позволяющее его применить к более широким классам потенциалов (например, легко охватить полиномиальные потенциалы). Как будет видно из доказательства, подобное усиление можно дать и для общего случая продакт-меры. Отметим работы [2—6], в которых содержатся другие условия, обеспечивающие самосопряженность операторов, близких к рассматриваемым.

1. Рассмотрим на пространстве $\mathbf{R}^\infty = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \ldots$ точек $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ $(x_k \in \mathbf{R}^1)$ гауссовскую меру

$$dg_\mu(x) = \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\pi}}\, e^{-\mu_1 x_1^2} dx_1\right) \otimes \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\pi}}\, e^{-\mu_2 x_2^2} dx_2\right) \otimes \ldots = (\gamma_1(x_1)\, dx_1) \otimes$$
$$\otimes (\gamma_2(x_2)\, dx_2) \otimes \ldots,$$

где $\mu = (\mu_k)_{k=1}^\infty$ $(\mu_k > 0)$ — заданная последовательность, и построим по ней пространство $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))$. В этом пространстве будем изучать оператор, порожденный дифференциальным выражением относительно бесконечного числа переменных вида

$$(\mathrm{L}u)(x) = -\sum_{k=1}^\infty \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)(x) - 2\mu_k x_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)(x) + (\mu_k^2 x_k^2 - \mu_k)\, u(x)\right] + q(x)\, u(x). \tag{1}$$

Сделаем некоторые пояснения. При каждом $k = 1, 2, \ldots$ отображение $L_2(\mathbf{R}^1, dx_k) \ni v(x_k) \mapsto u(x_k) = \gamma_k^{-\frac{1}{2}}(x_k)\, v(x_k) \in L_2(\mathbf{R}^1, \gamma_k(x_k)\, dx_k)$ является изометрией между этими пространствами, при которой $\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)(x_k)$ в $L_2(\mathbf{R}^1, dx_k)$ переходит в обставленную производную $(D_k u)(x_k) = \gamma_k^{-\frac{1}{2}}(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma_k^{\frac{1}{2}}(x_k) u(x_k))$, а $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_k}\right)(x_k)$ — в $(D_k^2 u)(x_k)$, совпадающую с k-м слагаемым в квадратной скобке из (1). Отсюда следует, что формально выражение (1) является об-

Лемма. *Для каждой цилиндрической бесконечно дифференцируемой финитной функции* $\varphi(x)$ *и любого* $\delta>0$ *существует последовательность* $(\varphi_n(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$, *где* $\varphi_n(x^{(n)})\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, *сходящаяся в* $L_2(\mathbf{R}^{\infty}, dg_{\mu}(x))$ *к* $\varphi(x)$ *и такая, что*: а) *нормы* $\left\|\sum_{k=1}^{n}(D_k^2\varphi_n)(x^{(n)})\right\|_{L_2(\mathbf{R}^{\infty}, dg_{\mu}(x))}$ *равномерно по* $n=1,2,\ldots$ *ограничены*; б) $|\varphi_n(x^{(n)})|$ *равномерно по* $x^{(n)}\in\mathbf{R}^n$ *и* $n=1,2,\ldots$ *ограничены*; в) $\operatorname{supp}\varphi_n\subseteq\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n}(-l_{k,n}(\delta), l_{k,n}(\delta))$ *при* $n>N_{\varphi}$, *где* N_{φ} — *достаточно большое.*

V) Примем в качестве множества Φ из I) совокупность всех цилиндрических бесконечно дифференцируемых финитных функций. Пусть $\varphi_0,\varphi_1\in\Phi$, $\varepsilon>0$ и $T\in(0,b)$ фиксированы, построим согласно лемме с $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ последовательности $(\varphi_{0,n})_{n=1}^{\infty}$, $(\varphi_{1,n})_{n=1}^{\infty}$, сходящиеся соответственно к φ_0 и φ_1. Для каждых $\varphi_{0,n}$ и $\varphi_{1,n}$ найдем согласно III) сильное решение $v_n(t)$ задачи Коши (5). Так как скорость распространения возмущения для гиперболического выражения $\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\mathrm{L}_n$ равна 1, то из свойства в) леммы следует, что для $b>0$ достаточно малого и $t\in[0,T]$ $\operatorname{supp}v_n(t,\cdot)\subseteq\subseteq\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n}(-l_{k,n}(\varepsilon), l_{k,n}(\varepsilon))$ при достаточно больших n.

Теперь можно следующим образом оценить интеграл (7):

$$|\Omega_n|^2\leqslant C_1\int_0^T\int_{Q_n}|a_n(x^{(n)})-a(x)|^2|v_n(t,x^{(n)})|^2dtdg_{\mu}(x)\leqslant$$

$$\leqslant C_1T^{\frac{1}{n}}\left(\int_{Q_n}|a_n(x^{(n)})-a(x)|^{2n}(\gamma_1(x_1)\ldots\gamma_n(x_n))^{-1}dg_{\mu}(x)\right)^{\frac{1}{n}}\times$$

$$\times\left(\int_0^T\int_{\mathbf{R}^n}|v_n(t,x^{(n)})|^{\frac{2n}{n-1}}(\gamma_1(x_1)\ldots\gamma_n(x_n))^{\frac{1}{n-1}}dtdg_{\mu}(x)\right)^{\frac{n-1}{n}}\leqslant$$

$$\leqslant C_2 2^n\left(\int_{Q_n}|a_n(x^{(n)})-a(x)|^{2n}(\gamma_1(x_1)\ldots\gamma_n(x_n))^{-1}dg_{\mu}(x)\right)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \qquad (8)$$

Оценка (8) аналогична неравенству (3.10) из [1], нужно только воспользоваться леммой, позволяющей перейти в интегралах (3.10) от $\mathbf{R}^{\infty}$ к Q_n. Разумеется, при проведении оценки используются леммы 1 — 3 [1], точнее, оценки (2.15) и (3.9) этой работы. ■

3. Доказательство леммы заключается в некоторой модификации доказательства леммы 4 из [1]; ниже используются обозначения и выкладки этой работы. Пусть $\varphi(x)=\varphi_{\text{ц}}(x^{(m)})$, последовательность $(\varphi_n(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ строим согласно формуле (3.11), причем $b_{j,n}=l_{m+j,n}(\delta)$ $(n=m+1,m+2,\ldots;$ $j=1,\ldots,n-m)$. Так как при каждом k $l_{k,n}(\delta)\to0$ при $n\to\infty$, то условие в) будет выполняться. Нужно проверить выполнение (3.12) и условия а). Обозначим $C_1=\inf\limits_{k=1,\ldots,n;n=1,2,\ldots}l_{k,n}(\delta)>0$; при $n=m+1,m+2,\ldots$ и $j=1,\ldots,n-m$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^1}|1-\chi_{j,n}(x_{m+j})|^2\gamma_{m+j}(x_{m+j})\,dx_{m+j}\leqslant 2\pi^{-1/2}\mu_{m+j}^{1/2}\int_{b_{j,n}}^{\infty}e^{-\mu_{m+j}x_{m+j}^2}dx_{m+j}\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi^{-1/2}\mu_{m+j}^{1/2}C_1^{-1}\int\limits_{b_{j,n}}^{\infty} x_{m+j}e^{-\mu_{m+j}x_{m+j}^2}dx_{m+j} = \pi^{-1/2}C_1^{-1}\mu_{m+j}^{-1/2}e^{-\mu_{m+j}b_{j,n}^2} =$$

$$= \pi^{-1/2}C_1^{-1}n^{-2-\delta} < \pi^{-1/2}C_1^{-1}n^{-\delta}(n-m)^{-2}. \tag{9}$$

Таким образом неравенство (3.12) будет выполняться с тем только отличием, что вместо множителя n^{-1} в его правой части стоит $n^{-\delta}$. Последнее обстоятельство, как видно из оценок работы [1, с. 740], обеспечивает сходимость φ_n к φ в $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))$.

Для проверки а) воспользуемся выкладкой (см. [1, с. 741]) (в ней, начиная со второй суммы, суммирование должно вестись по k от 1 до $n-m$) и четностью гауссовского веса. При некоторых постоянных C_2 и C_3 получим

$$\sum_{k=m+1}^{n} \| (D_k^2\varphi_n)(x^{(n)}) \|_{L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))} \leqslant C_2 + C_3 \sum_{k=m+1}^{n}\left[\left(\int\limits_{b_{k-m,n}}^{b_{k-m,n+1}} |(\gamma_k^{1/2}(x_k))'|^2 dx_k\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{b_{k-m,n}}^{b_{k-m,n+1}} \gamma_k(x_k)\,dx_k\right)^{1/2}\right] =$$

$$= C_2 + C_3\pi^{-1/4}\sum_{k=m+1}^{n}\left[\mu_k^{5/4}\left(\int\limits_{b_{k-m,n}}^{b_{k-m,n+1}} x_k^2 e^{-\mu_k x_k^2}dx_k\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \mu_k^{1/4}\left(\int\limits_{b_{k-m,n}}^{b_{k-m,n+1}} e^{-\mu_k x_k^2}dx_k\right)^{1/2}\right]. \tag{10}$$

Множитель при $\mu_k^{1/2}$ в (10) оценивается сверху подобно (9):

$$\int\limits_{b_{k-m,n}}^{b_{k-m,n+1}} e^{-\mu_k x_k^2}dx_k < C_1^{-1}\int\limits_{b_{k-m,n}}^{\infty} 2x_k e^{-\mu_k x_k^2}dx_k = C_1^{-1}\mu_k^{-1}e^{-\mu_k b_{k-m,n}^2} = C_1^{-1}\mu_k^{-1/2}n^{-2-\delta},$$

поэтому соответствующее слагаемое не превосходит $C_1^{-1/2}n^{-1-\delta/2}$.

Оценим множитель при $\mu_k^{5/4}$. Интегрируя по частям, а затем поступая, как и выше, получим

$$\int\limits_{b_{k-m,n}}^{b_{k-m,n+1}} x_k^2 e^{-\mu_k x_k^2}dx_k < \mu_k^{-1}\int\limits_{b_{k-m,n}}^{\infty} x_k d\left(e^{-\mu_k x_k^2}\right) = \mu_k^{-1}\left(b_{k-m,n}e^{-\mu_k b_{k-m,n}^2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{b_{k-m,n}}^{\infty} e^{-\mu_k x_k^2}dx_k\right) < \mu_k^{-3/2}\left[\left(\ln\frac{n^{2+\delta}}{\sqrt{\mu_k}}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{\mu_k}}{n^{2+\delta}} + \frac{1}{C_1 n^{2+\delta}}\right]. \tag{11}$$

Так как $\dfrac{n^{2+\delta}}{\sqrt{\mu_k}} \geqslant C_4 > 0$, то, благодаря оценке $\ln t \leqslant C_\rho t^\rho$ $(C_4 \leqslant t < \infty$, $\rho > 0$; $C_\rho > 0)$, можем оценить сверху правую часть (11) через

$$\mu_k^{-3/2}n^{-2-\delta_1}\left(C_\rho^{1/2}\mu_k^{1/2(1-\rho/2)} + C_1^{-1}n^{\delta_1-\delta}\right) \leqslant C_5\mu_k^{-3/2}n^{-2-\delta_1} \quad (C_5 > 0),$$

где обозначено $\delta_1 = \delta - \rho - \delta\rho/2$ ($\rho > 0$ подобрано столь малым, чтобы $0 < \delta_1 < \delta$). Таким образом, соответствующее слагаемое в правой части (10) не превосходит $C_5^{1/2}\mu_k^{1/2}n^{-1-\delta_1/2}$.

В конечном счете k-е слагаемое в последней сумме в (10) оценивается сверху через $C_6 n^{-1-\delta_1/2}$ $(C_6 > 0)$, а сама эта сумма — через $C_6(n-m)n^{-1-\delta_1/2}$.

Отсюда следует, что (10) ограничено при $n \to \infty$, т.е. условие а) также выполняется.

4. Сделаем два простых замечания, касающиеся проверки условия (4).

а) Зафиксируем $n = 1, 2, \ldots$ и введем на функциях $\mathbf{R}^\infty \ni x \mapsto f(x) \in \mathbf{C}^1$, измеримых относительно σ-алгебры, натянутой на цилиндрические множества, норму

$$\| f \|_n = 2^{n/2} \left(\int\limits_{Q_n} | f(x)|^{2n} \gamma_1^{-1}(x_1) \ldots \gamma_n^{-1}(x_n)\, dg_\mu(x) \right)^{1/2n} \leqslant \infty. \qquad (12)$$

Условие (4) означает, что $\| a - a_n \|_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Из неравенства треугольника для (12) заключаем, что *если* $a^{(1)}(x), \ldots, a^{(m)}(x) \in L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))$ *удовлетворяют* (4), *то и* $a(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} a^{(j)}(x)$ *ему удовлетворяет* (нужно положить $a_n(x^{(n)}) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_n^{(j)}(x^{(n)})$.

б) Будем рассматривать $a(x)$, представимые в виде сходящегося в $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))$ ряда

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_1, \ldots, x_k), \quad f_k \in L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x)). \qquad (13)$$

Если $\| f_k \|_n \leqslant \varepsilon_k$ $(n = 1, \ldots, k-1;\ k = 2, 3, \ldots)$ *и* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, *то для* $a(x)$ *выполняется условие* (4). В самом деле, положим $a_n(x^{(n)}) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x^{(k)})$, тогда $\| a - a_n \|_n = \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_n \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_n \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

5. Рассмотрим случай аналитических потенциалов $a(x)$, представимых в виде ряда

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x_1 \ldots x_k)^{2N_k}, \qquad (14)$$

где $c_k \geqslant 0$ — некоторые коэффициенты, а $N_k = 0, 1, \ldots$ — заданные степени. Найдем условие малости на c_k, обеспечивающее существенную самосопряженность A с потенциалом (14). Ясно, что условие (3) сейчас выполнено, нам нужно обеспечить выполнение (4) и сходимость ряда (14) по норме $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))$.

Для обозримости результата и упрощения выкладок будем предполагать, что $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots > 0$; $\mu_k \to 0$ в силу I). Тогда $l_{k,n}(\varepsilon) \leqslant l_{n,n}(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$ и для любого $\delta > 0$ существует такое $C_{1,\delta}$, что $l_{n,n}(\varepsilon) \leqslant C_{1,\delta} n^\delta \mu_n^{-1/2-\delta} = \hat{l}_n(\delta)$. Условие (4) будет выполнено, если мы добьемся выполнения при некотором $\delta > 0$ условия, аналогичного (4), в котором Q_n заменено на $\hat{Q}_n \supset Q_n$, равное произведению n-мерного куба со сторонами $(-\hat{l}_n(\delta), \hat{l}_n(\delta))$ на $\mathbf{R}^\infty$. Ясно, что замечания а) и б) остаются справедливыми при замене Q_n на $\hat{Q}_n$; соответствующую (12) норму обозначим через $\|\cdot\|_n^{\wedge}$. Таким образом нам нужно сверху оценить $\| f_k \|_n^{\wedge}$ $(n = 1, \ldots, k-1)$, где $f_k = c_k (x_1 \ldots x_k)^{2N_k}$. Используя формулу

$$\int\limits_{\mathbf{R}^1} t^{2a} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\, e^{-\mu t^2} \right) dt = \frac{(2a-1)!!}{(2\mu)^a} \quad (\mu > 0;\ a = 0, 1, \ldots), \qquad (15)$$

получим

$$\|(x_1\ldots x_k)^{2N_k}\|_n^{\wedge} = 2^{n/2}\left(2\int\limits_0^{\hat{t}_n(\delta)} t^{4N_k n}dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^1} x_{n+1}^{4N_k n}\gamma_{n+1}(x_{n+1})\,dx_{n+1}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\int\limits_{\mathbf{R}^1} x_k^{4N_k n}\gamma_k(x_k)\,dx_k\right)^{1/2n} =$$

$$= 2^{(n+1)/2}\frac{(C_{1,\delta}h^{\delta}\mu_n^{-1/2-\delta})^{2N_k n+1/2}}{(4N_k n+1)^{1/2}}\frac{((4N_k n-1)!!^{1/2n}}{(2\mu_{n+1})^{N_k}}\cdots\frac{((4N_k n-1)!!)^{1/2n}}{(2\mu_k)^{N_k}} \quad (16)$$

$$(n = 1, \ldots, k-1).$$

Как легко видеть, последовательность $\alpha_m = ((2m-1)!!)^{\frac{1}{m}}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ возрастает, поэтому $((4N_k n-1)!!)^{1/2n} < ((4N_k k-1)!!)^{1/2k}$; кроме того, $\mu_n \geqslant \mu_k$. При помощи этих неравенств правая часть (16) оценивается сверху через

$$2^{k/2}\frac{(C_{1,\delta}k^{\delta}\mu_k^{-1/2-\delta})^{2N_k k+1/2}}{(4N_k+1)^{1/2}}\frac{((4N_k k-1)!!)^{1/2}}{(2\mu_k)^{N_k k}}.$$

Так как $m! \sim \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$, то $(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!} \sim 2^{m+1/2}\left(\frac{m}{e}\right)^m$; оценивая при помощи этой асимптотики последнее выражение, получим

$$\|(x_1\ldots x_k)^{2N_k}\|_n^{\wedge} \leqslant 2^{k/2}C_{2,\delta}^{N_k k}k^{\delta(2N_k k+1/2)}\frac{(N_k k)^{2N_k k}}{\mu_k^{2N_k k+1/4+\delta(2N_k k+1/2)}}, \quad (17)$$

где $C_{2,\delta} > 0$. Из (17) вытекает, что если справедлива при некоторых $C > 0$ и $\eta > 0$ оценка

$$0 \leqslant c_k \leqslant C 2^{-(1+\eta)k/2-(N_k k)^{1+\eta}}(N_k k+1)^{-2N_k k}\mu_k^{(1+\eta)(2N_k k+1/4)} \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad (18)$$

то для потенциала (14) выполнены предположения замечания б) и поэтому такой потенциал удовлетворяет условию (4).

Для выяснения сходимости ряда (14) по норме $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))$ произведем при помощи (15) следующую оценку:

$$\|(x_1\ldots x_k)^{2N_k}\|^2_{L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))} = \int\limits_{\mathbf{R}^k}(x_1\ldots x_k)^{4N_k}\gamma_1(x_1)\ldots\gamma_k(x_k)\,dx_1\ldots dx_k \leqslant$$

$$\leqslant ((4N_k-1)!!)^k\frac{1}{(2\mu_k)^{2N_k k}} \leqslant C_3\frac{N_k^{2N_k k}}{\mu_k 2^{N_k k}}\left(\frac{2}{e}\right)^{2N_k k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что при выполнении (18) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|c_k(x_1\ldots x_k)^{2N_k}\|_{L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\mu(x))} < \infty$ и поэтому ряд (14) сходится.

Резюмируя, можем утверждать, что *оператор A существенно самосопряжен в случае потенциала $a(x)$ вида* (14), *где коэффициенты c_k удовлетворяют оценкам* (18) *при некоторых* C, $\eta > 0$. Из доказательства видно, что оценки (18) можно было бы уточнить.

Отметим, что совершенно аналогично можно рассмотреть случай более общего, чем (14), аналитического потенциала, когда $(x_1\ldots x_k)^{2N_k}$ заменено на $x_1^{2N_k^{(1)}}\ldots x_k^{2N_k^{(k)}}$, где $N_k^{(j)} = 0, 1, \ldots$ $(j = 1, \ldots, k;\ k = 1, 2, \ldots)$ — заданные степени.