УДК 517.5

Б. В. Винницкий, М. Н. Шеремета

О коэффициентах ряда Дирихле, задающего целую функцию

Пусть целая функция $f(s)$, $s=\sigma+it$, представлена абсолютно сходящимся для всех конечных s рядом Дирихле

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \tag{1}$$

где $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Положим $M(\sigma)=\sup\limits_{|t|<\infty}|f(\sigma+it)|$, $\Phi(\sigma)=\ln M(\sigma)$, и пусть $\Phi^*(\sigma)$ — функция, обратная к $\Phi(\sigma)$, $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (1), $\nu(\sigma)$ — его центральный индекс и $\Lambda(\sigma)=\lambda_{\nu(\sigma)}$. Кроме того, положим $\gamma(\sigma)=(\ln\sigma)^{-2}\ln\Phi(\sigma)$ и $\Delta=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\{\lambda_n\Phi^*(\lambda_n)\}^{-1}\ln n$, $\varkappa_n=(\ln|a_{n-1}|-\ln|a_n|)/(\lambda_n-\lambda_{n-1})$.

В данной статье обобщим следующий результат из работы [1] и укажем на некоторые его применения.

Теорема A. *Если* $\Delta=0$ *и*

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\gamma(\sigma)=\infty, \tag{2}$$

то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\lambda_n\Phi^*(\lambda_n)\{-\ln|a_n|\}^{-1}=1. \tag{3}$$

Если же $\gamma(\sigma)$ *монотонно стремится к* ∞ *при* $\sigma\to\infty$, *а* $\varkappa_n$ *не убывает при* $n\geqslant n_0$, *то в левой части* (3) *существует предел, равный* 1, *и* $\Phi^*(\lambda_{n+1})\sim\Phi^*(\lambda_n)$ *при* $n\to\infty$.

1. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Если*

$$h\overset{\mathrm{df}}{=}\varlimsup_{n\to\infty}\{-\ln|a_n|\}^{-1}\ln n<1, \tag{4}$$

то для всякого ε, $0<\varepsilon<1-h$, *при* $\sigma\geqslant\sigma_0(\varepsilon)$ *выполняется*

$$\mu(\sigma)\leqslant M(\sigma)\leqslant K(\varepsilon)\,\mu(\sigma/(1-h-\varepsilon)). \tag{5}$$

Достаточно доказать правую часть (5). Из (4) для всякого ε, $0<\varepsilon<1-h$, при $n\geqslant n_0=n_0(\varepsilon)$ имеем $(h+\varepsilon/2)\ln(1/|a_n|)\geqslant\ln n$. Поэтому, обозначив через N_1 множество тех значений $n\geqslant n_0$, для которых $(1-h-\varepsilon)\ln(1/|a_n|)\leqslant\sigma\lambda_n$, а через N_2 — множество тех значений $n\geqslant n_0$, для которых выполняется противоположное неравенство, имеем

$$M(\sigma)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}=\sum_{n=1}^{n_0-1}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}+\sum_{n\in N_1}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}+\sum_{n\in N_2}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}=$$

$$= o(M(\sigma)) + \sum_{n\in N_1} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n/(1-h-\varepsilon)) \exp(-(h+\varepsilon)\sigma\lambda_n/(1-h-\varepsilon)) +$$

$$+ \sum_{n\in N_2} \exp\{-\ln(1/|a_n|)(1-\sigma\lambda_n/\ln(1/|a_n|)\} \leqslant$$

$$\leqslant o(M(\sigma)) + \mu\left(\frac{\sigma}{1-h-\varepsilon}\right) \sum_{n\in N_1} \exp\{(h+\varepsilon)\ln|a_n|\} + \sum_{n\in N_2} \exp\{(h+\varepsilon)\ln|a_n|\} \leqslant$$

$$\leqslant o(M(\sigma)) + \{\mu(\sigma/(1-h-\varepsilon) + 1\} \sum_{n=n_0}^{\infty} \exp(-\alpha \ln n) \leqslant$$

$$\leqslant o(M(\sigma)) + \{\mu(\sigma/(1-h-\varepsilon)) + 1\} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha},$$

где $\alpha = (h+\varepsilon)/(h+\varepsilon/2) > 1$. Отсюда следует (5).

Из леммы 1 вытекает, что

$$1 - h \leqslant \varliminf_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1}\Phi^*(\ln\mu(\sigma)) \leqslant \varlimsup_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1}\Phi^*(\ln\mu(\sigma)) \leqslant 1. \tag{6}$$

Методом, используемым при доказательстве леммы 5 из [1], легко показать, что если выполнено условие (2), то

$$1 - h \leqslant \varlimsup_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1}\Phi^*(\Lambda(\sigma)) \leqslant 1, \tag{7}$$

а если $\gamma(\sigma)$ монотонно стремится к ∞ при $\sigma \to \infty$, то

$$1 - h \leqslant \varliminf_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1}\Phi^*(\Lambda(\sigma)) \leqslant 1. \tag{8}$$

Теорема 1. *Если выполняется* (2), *то*

$$1 - h \leqslant \varlimsup_{h\to\infty} \lambda_n\Phi^*(\lambda_n)\{-\ln|a_n|\}^{-1} \leqslant 1. \tag{9}$$

Если же $\gamma(\sigma)$ монотонно стремится к ∞ при $\sigma\to\infty$ и $\varkappa_n$ не убывает при $n \geqslant n_0$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} \lambda_n\Phi^*(\lambda_n)\{-\ln|a_n|\}^{-1} \geqslant 1 - h \text{ и } \varliminf_{n\to\infty} \Phi^*(\lambda_n)/\Phi^*(\lambda_{n+1}) \geqslant 1 - h.$$

Докажем лишь первую часть теоремы (доказательство второй части аналогично доказательству теорем 2 и 3 из [1]), причем достаточно рассматривать случай $h < 1$. Поскольку при достаточно больших σ выполняется $\mu(\sigma) \geqslant 1$, то $-\ln|a_{\nu(\sigma)}| \leqslant \sigma\lambda_{\nu(\sigma)}$. Из (7) следует существование последовательности $\sigma_k \to \infty$ такой, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется $\Phi^*(\Lambda(\sigma_k)) \geqslant (1-h-\varepsilon)\sigma_k$, $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Значит, существует последовательность $\sigma_k \to \infty$ такая, что $\Lambda(\sigma_k)\Phi^*(\Lambda(\sigma_k)) \geqslant -(1-h-\varepsilon)\ln|a_{\nu(\sigma_k)}|$, откуда следует левая часть (9). Правая часть (9) доказана в [1].

Следствие 1. *Если $h = 0$ и выполняется* (2), *то имеет место* (3); *если же $\gamma(\sigma)$ монотонно стремится к ∞ при $\sigma\to\infty$, а $\varkappa_n$ не убывает при $n \geqslant n_0$, то в левой части* (3) *существует предел, равный* 1, *и $\Phi^*(\lambda_{n+1}) \sim \Phi^*(\lambda_n)$ при $n\to\infty$.*

Отметим, что $h = 0$, если $\Delta = 0$, так что теорема 1 является обобщением теоремы А. Следующая теорема дополняет теорему 1.

Теорема 2. *Если $\gamma(\sigma)$ монотонно стремится к ∞ при $\sigma\to\infty$, то*

$$1 - h \leqslant \sup_{\{n_k\}} \{\varliminf_{k\to\infty} (\lambda_{n_k} - \lambda_{n_{k-1}})\Phi^*(\lambda_{n_{k-1}})/\ln|a_{n_{k-1}}/a_{n_k}|\} \leqslant 1. \tag{10}$$

Доказательство. Допустим, что правая часть (10) не верна, т. е. существуют последовательность $\{n_k\}$ и число $p>0$ такие, что $1+p\leqslant$ $\leqslant(\lambda_{n_k}-\lambda_{n_{k-1}})\Phi^*(\lambda_{n_{k-1}})/\ln|a_{n_{k-1}}/a_{n_k}|$, откуда

$$|a_{n_k}|\geqslant|a_{n_{k-1}}|\exp\{-(\lambda_{n_k}-\lambda_{n_{k-1}})\Phi^*(\lambda_{n_{k-1}})/(1+p)\}\geqslant$$

$$\geqslant|a_{n_0}|\exp\left\{-\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{n_j}-\lambda_{n_{j-1}})\Phi^*(\lambda_{n_{j-1}})/(1+p)\right\}. \qquad (11)$$

Положим $\sigma_k=\Phi^*(\lambda_{n_{k-1}})/(1+p)+1$ и пусть $\sigma_k\leqslant\sigma<\sigma_{k+1}$. Поскольку $\ln M(\sigma)\geqslant\ln|a_{n_k}|+\sigma_k\lambda_{n_k}$, то из (11) легко получить, что $\ln M(\sigma)\geqslant$ $\geqslant\ln|a_{n_0}|+\Phi((1+p)(\sigma-1))$, откуда $\sigma^{-1}\Phi^*(\ln|a_{n_0}|+\Phi((1+p)(\sigma-1)))\leqslant 1$. Так как для всех $c\ (-\infty<c<\infty)$ выполняется $\Phi^*(\sigma+c)\sim\Phi^*(\sigma)$ при $\sigma\to\infty$ (см. [1]), то, переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем $1+p\leqslant 1$, что невозможно. Таким образом, осталось показать, что при $h<1$ существует последовательность $\{n_k\}$, для которой

$$\varliminf_{k\to\infty}(\lambda_{n_k}-\lambda_{n_{k-1}})\Phi^*(\lambda_{n_{k-1}})/\ln|a_{n_{k-1}}/a_{n_k}|\geqslant 1-h.$$

Пусть $\{n_k\}$ — множество значений функции $\nu(\sigma)$, а $\rho(n_k)$ — точка скачка этой функции; очевидно, что $\rho(n_k)\to\infty$ при $k\to\infty$. Очевидно также, что $\Lambda(\sigma)=\lambda_{\nu(\sigma)}=\lambda_{n_k}$ при $\rho(n_k)\leqslant\sigma<\rho(n_{k+1})$. Поскольку $|a_{n_k}|\exp(\sigma\lambda_{n_k})$ и $|a_{n_{k+1}}|\exp(\sigma\lambda_{n_{k+1}})$ — два соседних максимальных члена, то при $\sigma=\rho(n_{k+1})$ имеем $|a_{n_k}|\exp(\lambda_{n_k}\rho(n_{k+1}))=|a_{n_{k+1}}|\exp(\lambda_{n_{k+1}}\rho(n_{k+1}))$, откуда $\rho(n_{k+1})=(\ln|a_{n_k}|-\ln|a_{n_{k+1}}|)/(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k})$. Таким образом, используя (8), имеем

$$1-h\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{\Phi^*(\lambda_{n_k})}{\rho(n_{k+1})}=\varliminf_{k\to\infty}\frac{(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k})\Phi^*(\lambda_{n_k})}{\ln|a_{n_k}/a_{n_{k+1}}|},$$

что и требовалось доказать. Теорема 2 дополняет результаты [2].

Следствие 2. *Если $h=0$ и $\gamma(\sigma)$ монотонно стремится к ∞ при $\sigma\to\infty$, то*

$$\sup_{\{n_k\}}\{\varliminf_{k\to\infty}(\lambda_{n_k}-\lambda_{n_{k-1}})\Phi^*(\lambda_{n_{k-1}})/\ln|a_{n_{k-1}}/a_{n_k}|\}=1.$$

2. Пусть $f_j(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{j,n}\exp(s\lambda_n)$, $j=1,2$, — целые функции, а $M_j(\sigma)$, $\Phi_j(\sigma)$, $\Phi_j^*(\sigma)$, $\gamma_j(\sigma)$, Δ_j и $\varkappa_{j,n}$ — соответствующие величины, определенные в п. 1. Пусть далее

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{1,n}a_{2,n}\exp\{s\lambda_n\} \qquad (12)$$

— композиция этих функций по Адамару.

Теорема 3. *Если $\gamma_j(\sigma)$, $j=1,2$, монотонно стремятся к ∞ при $\sigma\to\infty$, а $\varkappa_{j,n}$ не убывают при $n\geqslant n_0$ и $\Delta_j=0$, то*

$$\lim_{\sigma\to\infty}\sigma^{-1}\Phi^*(\ln M_F(\sigma))=1,\quad \Phi^*(\sigma)\overset{\mathrm{df}}{=}\Phi_1^*(\sigma)+\Phi_2^*(\sigma). \qquad (13)$$

Для доказательства этой теоремы нужны следующие леммы.

Лемма 2. *Если $\gamma_j(\sigma)$, $j=1,2$, монотонно стремятся к ∞ при $\sigma\to\infty$, то функция $\gamma(\sigma)=(\ln\sigma)^{-2}\ln\Phi(\sigma)$, где $\Phi(\sigma)$ — функция, обратная к $\Phi^*(\sigma)$, тоже монотонно стремится к ∞ при $\sigma\to\infty$.*

Доказательство леммы 2 достаточно элементарное, и на нем останавливаться не будем.

Лемма 3 (см. [1]). *Если* $\gamma(\sigma)$ *монотонно стремится к* ∞ *при* $\sigma \to \infty$, *то для всех* $a > 1$ *и для всех* K, $0 < K < \infty$, *выполняется неравенство* $\Phi(a\sigma) > K\sigma\Phi(\sigma)$, $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Лемма 4. *Если* $\Delta_1\Delta_2 = 0$, *то* $\Delta \overset{\mathrm{df}}{=} \varlimsup\limits_{n\to\infty} \{\lambda_n \Phi^*(\lambda_n)\}^{-1} \ln n = 0$.

Доказательство леммы 4 очевидно.

Лемма 5. *При выполнении условий теоремы* 3 *имеет место соотношение* $\Phi^*(\lambda_{n+1}) \sim \Phi^*(\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$.

Перейдем к доказательству теоремы 3. По теореме А для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \geqslant n_0 = n_0(\varepsilon)$, учитывая, что $\Phi_1^*(x) + \Phi_2^*(x) = \Phi^*(x)$, получаем $|a_{1,n}\, a_{2,n}| \leqslant \exp\{-\lambda_n \Phi^*(\lambda_n)/(1+\varepsilon)\}$. Отсюда, используя лемму 4, как и при доказательстве леммы 4 и теоремы 1 из [1], имеем

$$\ln M_F(\sigma) \leqslant 2\sigma\Phi((1+\varepsilon)\sigma/(1-2\varepsilon(1+\varepsilon))). \tag{14}$$

Покажем теперь, что при выполнении условий теоремы 3 для каждого δ, $0 < \delta < \infty$, выполняется

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1}\Phi^*(2\sigma\Phi((1+\delta)\sigma)) \leqslant 1+\delta. \tag{15}$$

Допустим, что (15) не выполняется, т. е. существуют числа δ и $p > \delta$ и последовательность $\sigma_k \to \infty$ такие, что $\Phi^*(2\sigma_k\overline{\Phi}((1+\delta)\sigma_k)) \geqslant (1+p)\sigma_k$ или $\Phi((1+p)\sigma_k) \leqslant 2\sigma_k\Phi((1+\delta)\sigma_k)$. Положив $(1+\delta)\sigma_k = x_k$ и $(1+p)/(1+\delta) = a > 1$, имеем $\Phi(ax_k) \leqslant 2\Phi(x_k)/(1+\delta)$, откуда по лемме 2 получаем противоречие с леммой 3. Значит, (15) доказано. Из (15) и (14), ввиду произвольности ε, получаем

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1}\Phi^*(\ln M_F(\sigma)) \leqslant 1. \tag{16}$$

Далее, применив теорему А к функциям $f_1(s)$ и $f_2(s)$, в силу монотонности $\varkappa_{1,n}$ и $\varkappa_{2,n}$, имеем $|a_{1,n}a_{2,n}| > \exp\{-\lambda_n\Phi^*(\lambda_n)/(1-\varepsilon)\}$ для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Поэтому $\ln M_F(\sigma) \geqslant \ln|a_{1,n}a_{2,n}| + \sigma\lambda_n \geqslant \sigma\lambda_n - \lambda_n\Phi^*(\lambda_n)/(1-\varepsilon)$. Положив в последнем неравенстве $\sigma_n = \Phi^*(\lambda_n)/(1-\varepsilon) + 1$, для всех σ, $\sigma_n \leqslant \sigma < \sigma_{n+1}$, имеем $\ln M_F(\sigma) \geqslant \lambda_n(\sigma_n - \Phi^*(\lambda_n)/(1-\varepsilon)) = \lambda_n$, откуда, используя лемму 5, для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \geqslant n_1 \geqslant n_0$ получаем

$$\Phi^*(\ln M_F(\sigma)) \geqslant \Phi^*(\lambda_n) \geqslant (1-\varepsilon)\Phi^*(\lambda_{n+1}) \geqslant (1-\varepsilon)^2(\sigma_{n+1}-1) \geqslant$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)^2(\sigma-1).$$

В силу произвольности ε, из последнего неравенства имеем

$$\varliminf_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1}\Phi^*(\ln M_F(\sigma)) \geqslant 1. \tag{17}$$

Равенство (13) теперь следует из (16) и (17).

3. Пусть $\pi(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} E(z/c_n, p_n)$ — целая функция, где $E(z, p)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода p, $\{c_n\}$ — последовательность отличных от нуля комплексных чисел, а $p_n = [L(n)]$, где $L(n)$ строго монотонно возрастает к ∞ при $n \to \infty$. Обозначим через $\overline{M}_\pi(r)$ максимум модуля функции $\pi(z)$ на $|z| = r$, через $\Psi_\pi^*(x)$ — функцию, обратную к функции $\Psi_\pi(x) = \ln \overline{M}_\pi(e^x)$, а через $n_\pi(r)$ — число нулей функции $\pi(z)$ в круге $|z| \leqslant r$. Положим

$$\tau = \varlimsup_{r\to\infty} \Psi_\pi^*(n_\pi(r))/\ln r.$$

Поскольку $n_\pi(r) \leqslant \ln \overline{M}_\pi(er)$, то $\tau \leqslant 1$ (см. [3, с. 26]). С другой стороны, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если выполняются условия*

$$\text{а)}\ \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln\ln\Psi_\pi(x)}{(\ln x)^2}=\infty;\qquad \text{б)}\ \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\Psi_\pi^*(e^{L(x)})}{\Psi_\pi^*(x)}\leqslant 1;$$

$$\text{в)}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{L(n)\ln|c_n|}=h<1,$$

то $\tau\geqslant 1-h$.

Достаточно рассматривать случай $h<1$. Допустим, что теорема 4 не верна, т. е. $\tau<1-h$. Тогда для каждого ε, $0<\varepsilon<1-h-\tau$, при $r\geqslant r_0(\varepsilon)$ выполняется $\Psi_\pi^*(n_\pi(r))\leqslant\bar\tau\ln r$, $\bar\tau=\tau+\varepsilon<1-h$. Взяв $r=|c_n|$, при $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ получаем

$$\Psi_\pi^*(n)\leqslant\bar\tau\ln|c_n|. \tag{18}$$

Известно [3, с. 21], что $\ln|E(z,p)|\leqslant 3e(2+\ln p)|z|^{p+1}$. Поэтому при $|z|=r=\exp\sigma$ имеем

$$\Psi_\pi(\sigma)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}3e(2+\ln L(n)|c_n|^{-L(n)}e^{(L(n)+1)\sigma}=f(\sigma). \tag{19}$$

Если в (19) вместо σ взять переменную $s=\sigma+it$, то по условию в) функция $f(s)$, определенная рядом (19), является целой и $M_f(\sigma)=f(\sigma)$. Из условия а) следует (2). Поэтому по теореме 1 имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Phi_f^*(L(n)+1)/\ln|c_n|\geqslant 1-h.$$

Из (19) следует, что $\Phi_f^*(\sigma)\leqslant\Psi_\pi^*(e^\sigma)$. Поэтому, учитывая (18), условие б) и то, что для всех постоянных $c\neq\infty$ выполняется $\Phi_f^*(\sigma+e)\sim\Phi_f^*(\sigma)$ при $\sigma\to\infty$, получаем

$$1-h\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\Phi_f^*(L(n))}{\ln|c_n|}\leqslant\bar\tau\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\Psi_\pi^*(\exp L(n))}{\Psi_\pi^*(n}\leqslant\bar\tau,$$

что невозможно. Теорема 4 доказана.

Отметим, что в роли последовательности $\{p_n\}$ можно взять $\{[\ln n]\}$. Отметим также, что теорема 4 дополняет результаты С. К. Балашова [4].

Далее будем пользоваться следующим следствием теоремы А.

Теорема Б [5]. *Пусть* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — *целая функция такая, что*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}(\ln\ln r)^{-2}\ln\ln\overline{M}_f(r)=\infty. \tag{20}$$

Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n\Psi_f^*(n)\{-\ln|a_n|\}^{-1}=1.$$

4. Пусть теперь $f(x)$ — действительная непрерывная на $[-1,1]$ функция, P_n — класс полиномов степени не выше n, а $E_n(f)=\inf_{p\in P_n}\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)-p(x)|$, $n=0,1,2,\ldots$. С. Н. Бернштейн [6] доказал, что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{E_n(f)}=0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ допускает аналитическое продолжение на всю плоскость до целой функции $f(z)$. Далее будем предполагать выполнение этого условия и докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Если выполняется* (20), *то* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n\Psi_f^*(n)\{-\ln E_n(f)\}^{-1}=1$.

Доказательство. Пусть $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(f) z^n$. $H(z)$ — целая функция, для которой при $|z| = r > 1$ для каждого $c > 0$ имеем [7]

$$\frac{K_1}{r} \overline{M}_f\left(\frac{1+r^2}{2r}\right) \leqslant H(r) \leqslant K_2 (r+c)\, \overline{M}_f\left(\frac{1+(r+c)^2}{2(r+c)}\right), \qquad (21)$$

где K_1 и K_2 — положительные постоянные. Логарифмируя (21) и учитывая (20), получаем $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} (\ln\ln r)^{-2} \ln\ln \overline{M}_H(r) = \infty$. Из (21) получаем также, что $\Psi^*_H(x) \sim \Psi^*_f(x)$, $x \to \infty$. Для завершения доказательства теоремы 5 достаточно применить теорему Б к функции $H(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винницкий Б. В., Шеремета М. Н. Асимптотика коэффициентов рядов Дирихле, представляющих целые функции.— УМЖ, 1975, **27**, № 2, с. 147—157.
2. Juneja O. P., Kappoor G. P. On the lower order of Entire Dirichlet series. — Math. Ann., 1972, Bd. 197.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956, 632 с.
4. Балашов С. К. О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней.— Изв. вузов. Математика, 1972, № 8, с. 10—18.
5. Шеремета М. Н. О коэффициентах степенного разложения целых функций.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, вып. 16, с. 41—44.
6. Bernstein S. N. Lecons sur les proprietes esremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable reele. Gauthier—Vallars, Paris, 1926.
7. Reddy A. R. Approximation of Entire Function.— Journ. of approximation theory, 1970, № 3.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию 11.VII. 1974 г.,
после переработки — 27.III. 1976 г.