УДК 517.513

С. В. Горленко

О некоторых дифференциальных свойствах вещественных функций

1. Предварительные сведения. Для непрерывной однозначной функции вещественного переменного рассмотрим, по аналогии с функциями комплексного переменного [1], множества

$$\mathfrak{M}_x(f) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{M_\varepsilon(f; x)},$$

где

$$M_\varepsilon(f; x) = \left\{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \ 0 < |\Delta x| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Легко показать, что $\mathfrak{M}_x(f)$ является множеством всех производных чисел функции $f(x)$ в точке x и только их. Множество $\mathfrak{M}_x(f)$ состоит из двух компонент: множества $\mathfrak{M}_x^-(f)$ левых производных чисел и множества $\mathfrak{M}_x^+(f)$ правых производных чисел, являющихся сегментами компактифицированной прямой разностных отношений функции $f(x)$. Из известных дифференциальных соотношений Данжуа [2] следует, что для почти всех x $\mathfrak{M}_x(f)$ содержит либо все числа (включая $\pm\infty$), либо одно — единственное. Из результатов работы [3] следует, что многозначное отображение

$$\Phi_f(x) : x \to \mathfrak{M}_x(f)$$

обладает множеством второй категории точек непрерывности (под непрерывностью многозначного отображения понимается полунепрерывность сверху) в области определения $f(x)$. Более того, если A — произвольное G_δ-подмножество области определения $f(x)$, то $\Phi_f(x)\,|\,A$ обладает множеством второй категории точек непрерывности относительно A. Методом от противного легко доказать следующую лемму.

Лемма. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $(a,b)\subset R^1$ функция и множество $e\subset(a,b)$ таково, что $\operatorname{mes} e=0$. *Тогда для произвольной точки $x_0\in\in(a,b)$ имеют место неравенства:*

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0+0\\ x\bar{\in}e}}\bar{f}^+(x)\geqslant\bar{f}^+(x_0),\quad \varliminf_{\substack{x\to x_0+0\\ x\bar{\in}e}}\underline{f}^+(x)\leqslant\underline{f}^+(x_0),\quad \varlimsup_{\substack{x\to x_0-0\\ x\bar{\in}e}}\bar{f}^-(x)\geqslant\bar{f}^-(x_0),$$

$$\varliminf_{\substack{x\to x_0-0\\ x\bar{\in}e}}\underline{f}^-(x)\leqslant\underline{f}^-(x_0),\quad \varlimsup_{\substack{x\to x_0+0\\ x\bar{\in}e}}\bar{f}^-(x)\geqslant\bar{f}^+(x)_0,\quad \varliminf_{\substack{x\to x_0+0\\ x\bar{\in}e}}\underline{f}^-(x)\leqslant\underline{f}^+(x_0),$$

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0-0\\ x\bar{\in}e}}\bar{f}^+(x)\geqslant\bar{f}^-(x_0),\quad \varliminf_{\substack{x\to x_0-0\\ x\bar{\in}e}}\underline{f}^+(x)\leqslant\underline{f}^-(x_0).$$

Определение. Скажем, что множество $A\subset R^1$ разделяется точкой $x_0\in R^1$, если выполняются следующие соотношения

$$A\cap[x_0,+\infty)\neq\varnothing \text{ и } A\cap(-\infty,x_0]\neq\varnothing.$$

В дальнейшем понадобятся очевидные обобщения классических теорем дифференциального исчисления.

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и на концах его принимает равные значения, то существует, по крайней мере одно, такое значение $x=c$, $a<c<b$, что $\mathfrak{M}_c(f)$ разделяется нулем.*

Теорема Лагранжа. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда внутри сегмента $[a,b]$ существует, по крайней мере одно, такое значение $x=c$, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ разделяет $\mathfrak{M}_c(f)$.*

2. О связности графика отображения $\Phi_f(x)$. Простые примеры (например, $y=|x|$) показывают, что если образ хотя бы одной точки при отображении $\Phi_f(x)$ не связен, то и график $\Phi_f(x)$ может обладать тем же свойством. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $y=f(x)$ — непрерывная функция, определенная в интервале $(a,b)\subset R^1$, и пусть для каждого $x\in(a,b)$ $\mathfrak{M}_x(f)$ связно.*

Тогда

$$B_\Phi=\{(x,y):x\in(a,b),\ y\in\Phi_f(x)\}$$

— связное подмножество R^2.

Доказательство. Достаточно $\forall x_0\in(a,b)$ доказать соотношение

$$\operatorname*{Ls}_{x\to x_0\pm0}\mathfrak{M}_x\cap\mathfrak{M}_{x_0}\neq\varnothing.$$

Допустим противное. Тогда в некоторой точке $x_0\in(a,b)$, например

$$\operatorname*{Ls}_{x\to x_0+0}\mathfrak{M}_x\cap\mathfrak{M}_{x_0}=\varnothing.$$

Это означает, что существует прямоугольная правосторонняя δ-окрестность множества $\mathfrak{M}_{x_0}$, свободная от точек $\mathfrak{M}_x$ при $x\in(x_0,x_0+\delta)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=f(x)-Cx$, где $C\in\mathfrak{M}_{x_0}$. При $x\in(x_0,x_0+\delta)$ $\mathfrak{M}_x(g)$ не содержит нуля. Отсюда следует, что $g(x)$ монотонна на $[x_0,x_0+\delta]$. Действительно, если $g(x_1)=g(x_2)$ при некоторых $x_1,x_2\in[x_0,x_0+\delta]$, то по теореме Ролля найдется точка, в которой $\mathfrak{M}_x(g)$ разделяется нулем и, следовательно, в силу своей связности, его содержат, что противоречиво. Будем рассматривать теперь $g(x)$ лишь на сегменте $[x_0, x_0+\delta]$ и пусть $g^{-1}(y)$— обратная функция. Множества $\mathfrak{M}_y(g^{-1})$ производных чисел функции $g^{-1}(y)$ получаются из соответствующих $\mathfrak{M}_x(g)$ преобразованием инверсии. Поэтому все $\mathfrak{M}_y(g^{-1})$ лежат внутри некоторого замкнутого прямоугольника, а $\mathfrak{M}_{y_0}(g^{-1})$ — вне его. Однако в этом случае $\lim\limits_{y\to y_0+0} \overline{(g^{-1}(y))}^{+} < \overline{(g^{-1}(y_0))}^{+}$, что противоречит лемме.

3. Категорный аналог теоремы В. В. Степанова. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в области $D \subset R^2$. Через $\mathfrak{M}_x(x, y)$ и $\mathfrak{M}_y(x, y)$ обозначаем частные производные множества, т.е. множества производных чисел $f(x, y)$ по направлению $y = \mathrm{const}$ и $x = \mathrm{const}$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть $f(x, y)$—непрерывная функция, определенная в области $D \subset R^2$, и пусть в некоторой точке $(x_0, y_0) \in D$ существуют $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ и*

$$\operatorname*{Lt}_{(x,y)\to(x_0 y_0)} \mathfrak{M}_x(x, y) = f'_x(x_0, y_0), \quad \operatorname*{Lt}_{(x,y)\to(x_0, y_0)} \mathfrak{M}_y(x, y) = f'_y(x_0, y_0).$$

Тогда $f(x, y)$ имеет полный дифференциал в точке $(x_0\ y_0)$.

Доказательство.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + $$
$$+ \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}\Delta y.$$

Но число $\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)}{\Delta x}$ разделяет по теореме Лагранжа множество $\mathfrak{M}_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)$, $0<\theta<1$, и так как последнее в пределе (при $\Delta x^2 + \Delta y^2 \to 0$) совпадает с $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, то это же верно и для $\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)}{\Delta x}$. Поэтому можно записать

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Аналогично

$$\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Отсюда

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y +$$
$$+ \gamma(\Delta x^2 + \Delta y^2),$$

где $\gamma(\Delta x^2 + \Delta y^2) \to 0$ при $\Delta x^2 + \Delta y^2 \to 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что если (x_0, y_0) — точка одновременной непрерывности отображений

$$\Phi_x(x, y): (x,y) \to \mathfrak{M}_x(x, y) \text{ и } \Phi_y(x, y): (x, y) \to \mathfrak{M}_y(x, y),$$

то из существования одноточечного предела $\operatorname*{Lt}\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathfrak{M}_x(x, y)$ необходимо следует $\operatorname*{Lt}\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathfrak{M}_x(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ и, аналогично, из существования одноточечного предела $\operatorname*{Lt}\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathfrak{M}_y(x, y)$ необходимо следует $\operatorname*{Lt}\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathfrak{M}_y(x, y) =$

$= \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, т. е. необходимо следует существование частных производных в точке (x_0, y_0).

Из теоремы 2 и приведенного выше замечания вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы непрерывная вещественная функция $f(x, y)$, определенная в области $D \subset R^2$, имела полный дифференциал на множестве E не первой категории в D, необходимо и достаточно, чтобы в точках множества не первой категории функция $f(x, y)$ обладала частными производными.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть E — пересечение множества точек, где существуют частные производные с множеством точек одновременной непрерывности отображений $\Phi_x(x, y)$ и $\Phi_y(x, y)$. Тогда E — не первой категории в D и для каждой точки E утверждение следует из теоремы 2. Теорему 3 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Теорема 4. *Для того чтобы непрерывная функция $f(x, y)$, определенная в области $D \subset R^2$, имела полный дифференциал на множестве E не первой категории в D, необходимо и достаточно, чтобы в точках множества не первой категории существовали одноточечные пределы частных производных множеств.*

В заключение заметим, что теоремы 2—4 естественно обобщаются на вещественные функции n переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. М., Физматгиз, 1963. 211. с.
2. Сакс С. Теория интеграла. М., 1949. 494 с.
3. Горленко С. В. Обобщение теоремы о точках непрерывности производной и его приложение в теории аналитических функций. Десятая математическая школа., Изд. Ин-та математики АН УССР, 1975, с. 260—269.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
18.VII. 1975 г.