УДК 517.51:519.5

В. К. Дзядык

К приближению функций комплексного переменного на дугах

1. Одной из важных задач в теории приближения функций является задача, относящаяся к исследованию окончательности оценок приближения при помощи полиномов степени n, которые удается получить для каждой из функций какого-либо класса.

Поскольку при фиксированном натуральном n такая задача является, как правило, очень трудной, то, начиная с С. Н. Бернштейна, изучают окончательность целой последовательности подобных оценок одновременно для всех натуральных n. Решение упомянутой задачи выражается, как правило, совокупностью прямой и обратной теорем, которые позволяют получить так называемую конструктивную характеристику того или иного класса функций. В случае периодических функций такие характеристики для различных классов получены Джексоном, Бернштейном, Валле-Пуссеном и Зигмундом.

Позже подобные характеристики получены также для классов непериодических функций, заданных на $[-1, 1]$, и классов комплексных функций, заданных на различных, более или менее сложных множествах $\mathfrak{M}$ комплексной плоскости, аналитических во внутренних точках $\mathfrak{M}$ и непрерывных на $\mathfrak{M}$.

Эти характеристики получены в терминах величины $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$, выражающей расстояние от точки z границы множества $\mathfrak{M}$ до линии уровня $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}(\mathfrak{M})$ этого множества при конформном отображении $z = \Psi(\mathfrak{M}, w)$ области $D = \{w : |w| > 1\}$ на внешность $\mathfrak{M}$, удовлетворяющем условию

$$\lim_{w\to\infty} \frac{\Psi(\mathfrak{M}, w)}{w} > 0.$$

Однако и в этих терминах даже конструктивную характеристику классов Гельдера $H^\alpha(\mathfrak{M})$, $0 < \alpha < 1$, получить невозможно уже на таком достаточно простом множестве, как дуга

$$\widehat{\mathfrak{M}} = L = [0, 1] \cup [0, i],$$

имеющая прямой угол в точке $z = 0$.

Из результатов, содержащихся, например, в статье [1], следует, что для любой функции $f(z) \in H^\alpha(L)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, можно построить многочлены степени n такие, что

$$\| f(z) - P_n(z) \|_{C(L)} \leqslant An^{-\frac{\alpha}{2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

В данной статье устанавливается, что оценки (1) являются в определенной степени окончательными в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in H^\alpha(L)$, $0 < \alpha < 1$, такая, что каковы бы ни были число $\varepsilon > 0$ и постоянная $A_0 > 0$, для любой последовательности $\{P_n(z)\}$ многочленов степени n, начиная с некоторого номера n_0, будет

$$\| f(z) - P_n(z) \|_C > A_0 n^{-\frac{\alpha}{2} - \varepsilon}. \tag{2}$$

Эти неравенства, в частности, дают отрицательный ответ на один вопрос, недавно поставленный Д. Дж. Ньюменом [2].

2. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathfrak{M}$ — ограниченный континуум; $\partial\mathfrak{M}$ — граница $\mathfrak{M}$; $w = \Phi(\mathfrak{M}; z)$ — функция, обратная к $\Psi(\mathfrak{M}; w)$; $\Gamma_R(\mathfrak{M})$ $(R > 1)$ — R-я линия уровня множества $\mathfrak{M}$, т. е. $\Gamma_R(\mathfrak{M}) = \{z : |\Phi(\mathfrak{M}, z)| = R\}$; $\rho_R(z)$ — расстояние от точки $z \in \partial\mathfrak{M}$ до линии уровня $\Gamma_R(\mathfrak{M})$; $E_n(f; \mathfrak{M})$ — наилучшее приближение функции $f(z)$ на $\mathfrak{M}$ многочленами степени $\leqslant n$; в случае положительных функций $f(z)$ и $g(z)$ будем писать: $f(z) \preccurlyeq g(z)$, если $f(z) \leqslant A \cdot g(z)$, $A = \text{const}$ и $f(z) \asymp g(z)$, если $f(z) \preccurlyeq g(z)$ и одновременно $g(z) \preccurlyeq f(z)$.

3. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Функцию* $f(z)\in H^{1/2}(L)$, *определенную на* $L\overset{\text{df}}{=}[0,1]\bigcup[0,i]$ *при помощи равенств*

$$f(z)=\begin{cases}-\sqrt{x}, & \text{если } z\in L^1\overset{\text{df}}{=}[0,1],\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{y}, & \text{если } z\in L^2\overset{\text{df}}{=}[0,i],\end{cases} \tag{3}$$

ни при каком $\varepsilon>0$ *невозможно одновременно при всех* $n=1,2,\ldots$ *приблизить алгебраическими многочленами степени* $\leqslant n$ *с точностью* $n^{-(1/4+\varepsilon)}$, *т. е.*

$$\sup_n E_n(f;L)\cdot n^{1/4+\varepsilon}=+\infty. \tag{4}$$

Заметим, что функция $f(z)$ представляет собой на L граничные значения той ветви функции $\sqrt{z}$, которая является аналитической в области G, ограниченной замкнутой кривой $L^1\bigcup L^2\bigcup\Sigma$, где

$$\Sigma\overset{\text{df}}{=}\left\{z:z=e^{it},\ \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant 2\pi\right\}.$$

В силу этого функцию $f(z)$ будем считать определенной и в G.

Доказательство теоремы. Действительно, предположим от противного, что при некотором $\varepsilon>0$ существует последовательность $\{P_n(z)\}$ алгебраических многочленов степени не выше n такая, что

$$\max_{z\in L}|f(z)-P_n(z)|\leqslant n^{-(1/4+\varepsilon)},\qquad n=1,2,3,\ldots \tag{5}$$

Чтобы прийти к противоречию, обозначим при некотором фиксированном $r\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (выбор которого осуществим позже) через L_r^1, L_r^2 и Σ_r дуги, полученные из L^1, L^2 и Σ путем их гомотетического преобразования относительно начала координат с коэффициентом, равным r: $L_r^1=\{z:z=x,\ 0\leqslant x\leqslant r\}$, $L_r^2=\{z:z=iy,\ 0\leqslant y\leqslant r\}$, $\Sigma_r=\left\{z:z=re^{it},\ t\in\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]\right\}$. Область, ограниченную замкнутой кривой $L_r^1\bigcup L_r^2\bigcup\Sigma_r$, обозначим через G_r.

Возьмем произвольное натуральное число $n\geqslant 2$ и, положив $n'\overset{\text{df}}{=}\left[\frac{n}{2}\right]$, представим в произвольно взятой точке $z\in G_r$ разность $f(z)-P_{n'}(z)$ в виде

$$\begin{aligned}f(z)-P_{n'}(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)-P_{n'}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma\frac{P_{n'}(\zeta)-P_{n'}(z)}{\zeta-z}\,d\zeta-\\&-\frac{1}{2\pi i}P_{n'}(z)\int_\Sigma\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)-P_{n'}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\tilde{f}(z)-\\&-\tilde{P}_{n'}(z)-\frac{1}{2\pi i}P_{n'}(z)\ln\frac{1-z}{i-z},\end{aligned} \tag{6}$$

где через $\tilde{f}(z)$ обозначен интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$, представляющий собой функцию, аналитическую в единичном круге $|z|<1$, а через $\widetilde{P}_{n'}(z)$ — многочлен степени $\leqslant n'-1<n$.

Проведем теперь следующее рассуждение.

1. Пусть z — произвольная точка, взятая на L,

$$\sigma \overset{\mathrm{df}}{=} \partial G \cap U(z, n^{-4}),\ \ \sigma' \overset{\mathrm{df}}{=} \partial U(z, n^{-4}) \cap G$$

и z' — произвольная точка из области $U\left(z, \frac{1}{2n^4}\right) \cap G$. В таком случае, учитывая, что при произвольном $z \in L$ в силу (3) и (5) $|P_{n'}(z)| \leqslant |f(z)|+1 \leqslant 2$ и что на основании теоремы о модуле производной от алгебраического многочлена (см. [3]) для всех $\xi \in \overline{U(z, n^{-4})}$ имеет место неравенство

$$|P'_{n'}(\xi)| \leqslant \frac{1}{\rho_{1+\frac{1}{n}}(\xi)} \leqslant n^{\frac{3}{2}},$$

заключаем, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\zeta)-P_{n'}(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{L\setminus\sigma} \frac{f(\zeta)-P_{n'}(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta\right| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\sigma'} \frac{f(\zeta)-P_{n'}(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta\right| + |f(z')-P_{n'}(z')| \leqslant n^{-(1/4+\varepsilon)}\int\limits_{L\setminus\sigma}\frac{|d\zeta|}{|\zeta - z'|} +$$

$$+\left[n^{-(1/4+\varepsilon)} + \max_{\zeta\in\sigma'}|f(\zeta)-f(z)| + \frac{n^{3/2}}{n^4}\right] + \left[n^{-(1/4+\varepsilon)} + |f(z')-\right.$$

$$\left.-f(z)| + \frac{n^{3/2}}{n^4}\right] \leqslant n^{-(1/4+\varepsilon)}\ln n. \tag{7}$$

Поскольку в этом неравенстве точка z явно не фигурирует, то данное неравенство (7), как легко видеть, будет справедливым при всех $z' \in U\left(L, \frac{1}{2}n^{-4}\right) \cap G_r$. Если же $z' \in G_r \setminus U\left(L, \frac{1}{2}n^{-4}\right)$, то справедливость неравенства (7) устанавливается немедленно.

2. Так как функция $\widetilde{f}(z)$ в равенстве (6) при $r \leqslant \frac{1}{2}$ является аналитической в области, граница которой отстоит от границы области G_r на расстоянии не меньше, чем на $\frac{1}{2}$, то согласно теореме Бернштейна — Уолша (см. [4, с. 122]) существует многочлен $\pi_n(z)$ степени $\leqslant n$ такой, что при всех $z \in G_r$ будет выполняться неравенство

$$|\widetilde{f}(z) - \pi_n(z)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n < n^{-(1/4+\varepsilon)}. \tag{8}$$

3. Проведем линию уровня $\Gamma_{1+1}(L) = \Gamma_2(L)$ дуги L и область, ограниченную этой линией обозначим через g. Поскольку в силу принципа максимума и неравенства $|P_{n'}(z)| \leqslant 2$, $\zeta \in L$ при любом $z \in C\overline{g}$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{P_{n'}(z)}{\Phi(L; z)^{n'+1}}\right| \leqslant \max_{\zeta\in L}\frac{|P_{n'}(\zeta)|}{|\Phi(L;\zeta)|^{n'+1}} \leqslant 2$$

и, значит,

$$|P_{n'}(z)| \leqslant 2 \max_{z \in \Gamma_2(L)} |\Phi(L, z)|^{n'+1} = 2 \cdot 2^{n'+1} \leqslant 4 \cdot 2^{n/2}, \tag{9}$$

то, взяв число $r \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ настолько малым, чтобы линия уровня $\Gamma_{1+2}(g_0) = \Gamma_3(g_0)$ области $g_0 = G_r \cap g$ лежала в круге $|z| < 1$, в силу того, что функция $\ln \frac{1-z}{i-z}$ является аналитической в единичном круге, согласно теореме Бернштейна — Уолша (см. [4, с. 122]) заключаем, что существует многочлен $\breve{\pi}_{n'}(z)$ степени не выше n' такой, что при всех $z \in g_0$ будет

$$\left| \ln \frac{1-z}{i-z} - \breve{\pi}_{n'}(z) \right| \leqslant \frac{1}{3^{n'}} \leqslant 3^{-n/2}. \tag{10}$$

На основании соотношений (6) — (10) видим, что многочлен

$$\widetilde{P}_n^*(z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} P_{n'}(z) + \pi_n(z) - \widetilde{P}_{n'}(z) - \frac{1}{2\pi i} P_{n'}(z)\, \breve{\pi}_{n'}(z)$$

степени $\leqslant n$ обладает тем свойством, что во всех точках $z \in g_0$ имеет место неравенство

$$|f(z) - \widetilde{P}_n^*(z)| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) - P_{n'}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| + |\widetilde{f}(z) - \pi_n(z)| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left| P_{n'}(z) \left[\ln \frac{1-z}{i-z} - \breve{\pi}_{n'}(z) \right] \right| \leqslant n^{-(1/4+\varepsilon)} \ln n +$$

$$+ n^{-(1/4+\varepsilon)} + 2^{n/2} \cdot 3^{-n/2} < \frac{1}{n^{1/4+\varepsilon/2}}.$$

Отсюда в силу теоремы 4.1 из работы [5] получаем:

$$f[\Psi(g_0, e^{it})] = [\Psi(g_0, e^{it})]^{1/2} \in H^{1/4+\varepsilon/2}.$$

Поскольку функция $\Psi(g_0, e^{it})$ согласно теореме Осгуда и Тейлора [6] в окрестности нуля представима в виде

$$\Psi(g_0, e^{it}) = \lambda(t)(e^{it} - 1)^{1/2},$$

где $\lambda(0) \neq 0$ и $\lambda(t)$ непрерывна, то приходим к заключению, что в окрестности нуля функция

$$\sqrt{\lambda(t)}\,(e^{it} - 1)^{1/4} \in H^{1/4+\varepsilon/2},$$

что неверно. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык В. К. К теории приближения функций на замкнутых множествах комплексной плоскости (по поводу одной проблемы С. М. Никольского).— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1975, **134**, с. 63—114.
2. Newman D. J. Jackson's Theorem on Complex Arcs.— J. of approximation, 1974, **10**, № 3, p. 206—217.
3. Дзядык В. К. Обратные теоремы приближения функций в комплексных областях. УМЖ, 1963, **15**, № 4, с. 365—375.
4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М., «Наука», 1968. 624 с.
5. Дзядык В. К., Алибеков Г. А. О равномерном приближении функций комплексного переменного на замкнутых множествах с углами.— Мат. сб. Новая серия, 1968, **75**, № 4, с. 502—557.

6. Osgood W. F. and Taylor E. H. Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition.— Trans. Amer. Math. Soc., 1913, **14**, p. 277—298.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
12.XI. 1976 г.