УДК 530.12:531.51

Э. И. Кучеренко

К вопросу о сходимости некоторых приближенных методов решения уравнений движения четырехгироскопной вертикали

Определение истинной вертикали (или горизонтали) на подвижном основании (самолет, ракета) является одним из основных факторов, без знания которых невозможно решение многих задач навигации.

Быстрое развитие авиационной техники, увеличение скоростей и дальности полета, удлинение участков траекторий непрерывного (без внешней корректировки) движения объектов предъявляет повышенные требования в отношении точности гировертикалей.

Совершенствование существующих и создание новых образцов гировертикалей должно базироваться на достаточно развитой теории и точных методах расчета.

Обоснованию сходимости методов последовательных приближений и метода Галеркина в соответствующим образом выбранном пространстве для систем уравнений четырехгироскопной вертикали посвящена данная статья.

Запишем систему уравнений четырехгироскопной вертикали, следуя [1], в виде:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \alpha}+mg_0 l\sin\alpha\cos\beta=0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot{\beta}}\right)-\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \beta}+mg_0 l\sin\beta\cos\alpha=0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot{\delta}}\right)-\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \delta}+c\delta=0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot{\gamma}}\right)-\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \gamma}+c\gamma=0,
\end{gathered}\tag{1}$$

и введем начальные условия

$$\alpha|_{t_0=0}=\alpha_0;\quad \beta|_{t_0=0}=\beta_0;\ \gamma|_{t_0=0}=\gamma_0;\quad \delta|_{t_0=0}=\delta_0,\tag{2}$$

причем в (1) и (2) приняты обозначения из [1]. Проинтегрировав (1) по t в пределах от $t_0=0$ до t, получим

$$\left.\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot{\alpha}}\right|_0^t-\int_0^t\left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \alpha}+mg_0 l\sin\alpha\cos\beta\right]dt=0,$$

$$\left.\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot\beta}\right|_0^t - \int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \beta} + mg_0 l \sin\beta\cos\alpha\right] dt = 0, \tag{3}$$

$$\int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \delta} + c\delta\right] dt = 0; \quad \int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \gamma} + c\gamma\right] dt = 0,$$

где $\dfrac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot\delta} = 0; \dfrac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot\gamma} = 0$ согласно [1]. Проинтегрировав уравнения системы (3) по t вторично в пределах от $t_0 = 0$ до t, получим

$$\int_0^t \left\{\left.\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot\alpha}\right|_0^t - \int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \alpha} + mg_0 l \cos\alpha\sin\beta\right] dt\right\} dt = 0,$$

$$\int_0^t \left\{\left.\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot\beta}\right|_0^t - \int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \beta} + mg_0 l \sin\alpha\cos\beta\right] dt\right\} dt = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^t \left\{\int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \delta} + c\delta\right] dt\right\} dt = 0, \quad \int_0^t \left\{\int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \gamma} + c\gamma\right] dt = 0.\right.$$

Будем считать α, β, γ, δ непрерывными вместе со вторыми производными на $0 < t < \infty$.

Введем пространство Соболева [2] $W_2^{(1)}$ с нормой элемента $v = v(t)$ в виде $\|v\|^2_{W_2^{(1)}} = \|v\|^2_H + \int_0^t \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dt = \int_0^t v^2 dt + \int_0^t \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dt$. Следуя [3], введем пространство $\overline{W}_2^{(1)}$ элементов

$$u = u(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = u(g_1, g_2, g_3, g_4), \; u_1 = u_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = u_1(g_1, g_2, g_3, g_4)$$

с метрикой

$$\rho(u, u_1)_{\overline{W}_2^{(1)}} = \max \| g_i - g_{1i} \|_{W_2^{(1)}}.$$

Введем операторы

$$T_\alpha = \int_0^t \left\{\left.\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot\alpha}\right|_0^t + \int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \alpha} + mg_0 l \sin\alpha\cos\beta\right] dt\right\} dt,$$

$$T_\beta = \int_0^t \left\{\left.\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \dot\beta}\right|_0^t + \int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \beta} + mg_0 l \sin\beta\cos\alpha\right] dt\right\} dt,$$

$$T_\delta = \int_0^t \left\{\int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \delta} + c\delta\right] at\right\} dt, \; T_\gamma = \int_0^t \left\{\int_0^t \left[\frac{\partial (T_1+T_2)}{\partial \gamma} + c\gamma\right] dt\right\} dt.$$

Разложив $\sin g_i$, $\cos g_i$ в ряд Маклорена и взяв члены разложения в степени не выше четвертой и подставив в (4), получим систему:

$$\begin{aligned} T_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 0, \\ T_\beta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 0, \\ T_\delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 0, \\ T_\gamma(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Введем операторы:

$$Tu = \{T_\alpha, T_\beta, T_\gamma, T_\delta\} \quad \text{и} \quad Au = u - Tu. \tag{6}$$

Перейдем в (4) к безразмерным переменным, для чего заменим: $t = \tau T_0$, $m = \dfrac{m_\delta H}{R^2}$, $c = \dfrac{c_\delta H}{T_\delta}$, $v = kT_0 v_\delta$, $l = l_\delta R$, $g = \dfrac{g_\delta}{T_0^2} = R$, $H = c\dot{\Phi} = c\dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau}T_0$, $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d\alpha}{d\tau}T_0$, $\dot{\Phi}_0 = \dfrac{d\Phi}{d\tau}T_0$, где $T_0 \approx 84{,}4$ *мин*, m — масса всей системы, l — расстояние от точки подвеса 0 до центра тяжести системы.

Поставим задачу следующим образом: Найти условия, при которых метод последовательных приближений и метод Галеркина сходятся для системы (1), (2) в пространстве $\overline{W}_2^{(1)}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Оператор Au удовлетворяет в $\overline{W}_2^{(1)}$ условиям Липшица.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\| Au_m - Au_n \|_{\overline{W}_2^{(1)}} = \| u_m - u_n - Tu_m + Tu_n \|_{\overline{W}_2^{(1)}} =$$

$$= \max_i \| g_{i_m} - g_{i_n} - Tg_i(g_1, g_2, g_3, g_4)_m + Tg_i(g_1, g_2, g_3, g_4)_n \|_{W_2^{(1)}}.$$

Из рассмотрения вида Tg_i и нормы в $W_2^{(1)}$ с применением теорем вложения Соболева [2] получим по схеме, данной в [4]:

$$\| Au_m - Au_n \|_{\overline{W}_2^{(1)}} \leqslant T_0 SP\sqrt{t_1}\, \| u_m - u_n \|_{\overline{W}_2^{(1)}},$$

где t_1 — выбранное нами конечное время, $T_0 SP\sqrt{t_1} = \Gamma$,

$$P = \Bigg\{\left(1 + \frac{1}{T_0}\right) + \Bigg[(l_\delta v_\delta m_\delta H)^2 (SK)^{k_1} \cdot 30 + 20\,(20\,(SK)^{k_2} \times$$

$$\times (\omega_\delta)^2 + 20\,(SK)^{k_3}\left(\frac{d\Phi}{d\tau T_0}\right)^2 (c_\delta l_\delta^2 m_\delta)^2 +$$

$$+ 600H\left(\omega_\delta + \frac{v}{R}\right)^2 (SK)^{k_4}\, t_1 T_0^2 (v_\delta R T_0)^2 + 20\Bigg(20\Bigg(\omega_\delta T_0 +$$

$$+ \frac{v_\delta}{R}T_0\Bigg)^2 (SK)^{k_5}\, T_0 (t_1)^4 T_0^4 + 6\left(\frac{gR}{T_0^2}\,\frac{m_\delta}{R^2}\,HRl_1\right)^2 (SK)^{k_6}\, t_1 T_0 +$$

$$+ 4\left(c_\delta \frac{H}{T_0}\right)^2 t_1 T_0\Bigg]\Bigg\}^{1/2},$$

$\| u \|_{\overline{W}_2^{(1)}} \leqslant K$, S — постоянная теорем вложения Соболева (см. [2]), r_i, r_j, r_k — наибольшие показатели степеней в произведениях $g_i^{r_i} g_j^{r_j} g_k^{r_k}$ в Tg_i $(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, 3, 4)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Оператор Tu вполне непрерывен в $\overline{W}_2^{(1)}$.*

Доказательство вытекает из непрерывности левых частей (3) в $W_2^{(1)}$.

О сходимости метода Галеркина для системы (1), (2) говорит следующая теорема.

Теорема 3. *Если для Au выполнены условия Липшица в $\overline{W}_2^{(1)}$ с $\Gamma < 1$, то метод Галеркина сходится для системы* (1), (2) *в $\overline{W}_2^{(1)}$.*

Доказательство вытекает из теоремы Красносельского [5], так как оператор Au вполне непрерывен в $\overline{W}_2^{(1)}$ (это следует из полной непрерывности Tu в $\overline{W}_2^{(1)}$, а индекс решения уравнения (6) равен $+1$, что следует из теоремы Роте (так как $\Gamma < 1$). Поэтому метод Галеркина сходится для системы (5), а вместе с тем и для эквивалентной ей системы (1), (2) в $\overline{W}_2^{(1)}$. Эти же условия являются достаточными и для сходимости метода последовательных приближений для системы (1), (2) в $W_2^{(1)}$.

Остается выяснить, когда выполняются условия $\Gamma = T_0SR\sqrt{t_1} < 1$. Для этого надо определить S — постоянную теорем вложения: S — постоянная для двух выбранных пространств величина, не зависящая от выбора элементов этих пространств.

В нашем случае $S' \geqslant \frac{\| u \|_H}{\| u \|_{\overline{W}_2^{(1)}}}$ и можно взять для S отношение нормы u в этих пространствах. На конкретных примерах нахождение S показано в [6].

Теперь покажем, как находить по методу Галеркина решение (1), (2). Так как $\| u \|_H \leqslant S \| u \|_{W_2^{(1)}}$, то из сходимости метода в $W_2^{(1)}$ следует сходимость его и в H, и можно искать решение в H в виде полиномов

$$g_{ir} = a_{1i}\varphi_1 + a_{2i}\varphi_2 + \ldots + a_{ri}\varphi_r \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ — система координатных функций в $H[0, t_1]$, каждая из которых удовлетворяет начальным условиям (2):

$$\varphi_1 = t; \quad \varphi_2 = t^2; \quad \varphi_3 = t^3, \ldots, \varphi_r = t^r.$$

Коэффициенты a_{ki} $(k = 1, \ldots, r)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{gathered}
\eta_1 (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1};\ a_{12}. a_{22}, \ldots a_{r2}; \ldots, a_{r4}) = 0, \\
\eta_2 (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1};\ a_{12}a_{22}, \ldots, a_{r2}; \ldots, a_{r4}) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_4 (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1};\ a_{12}, a_{22}, \ldots a_{r2}; \ldots, a_{r4}) = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

получающейся при ортогонализации на $[0, t_1]$ невязки между левой и правой частями уравнений (1) и координатными функциями φ_i при подстановке g_{ir}:

$$\int_0^{t_1} Tg_{ir} (g_{1r}; g_{2r}; g_{3r}; g_{4r};) \varphi_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4, \ldots, r;\ i = 1, 2, 3, 4).$$

Возникает вопрос: когда $\Gamma = T_0SR\sqrt{t_1} < 1$?

Выше были определены $T_0 \approx 84{,}4 \cdot 60 > 1$, $P > 1$. Следовательно, $\Gamma < 1$ может быть только при достаточно малых t_1.

В случае $\Gamma > 1$ можно применять комбинированный метод — метод сеток — Галеркина, следуя [6, 7]. Этот метод заключается в том, что интервал времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ делят на n частей и на каждой части ставят свою задачу Коши для системы (1). При этом, как показано в [6], Γ убывает с уменьшением отрезка $\frac{t_1}{n}$, что обеспечивает выполнение условий сходимости комбинированного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сайдов П. И., Слив Э. И., Чертков Р. И. Вопросы прикладной теории гироскопов. Л. Судпромгиз, 1961. 427 с.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л. Изд-во ЛГУ, 1950. 256 с.

3. Кучеренко Э. И. О сходимости метода Галеркина для задачи Коши системы нелинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными.— Дифференц. уравнения, 1968, 4, № 3, с. 553—555.
4. Кучеренко Э. И. Применение метода Галеркина к интегрированию систем нелинейных обыкновенных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 3, с. 475—482.
5. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1956. 392 с.
6. Кучеренко Э. И., Петухов В. И. Определение входного воздействия на нелинейный преобразователь по результатам измерений на выходе. — Автометрия, 1970, № 5, с. 96—100.
7. Кучеренко Э. И. О двух комбинированных методах интегрирования дифференциальных уравнений. Труды Рязанского радиотехнического института. Сер. математики. Рязань, 1968, вып. 8, с. 98—115.

Московский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
20.X. 1972 г.