УДК 517.9

С. Д. Милушева, Д. Д. Байнов

Применение метода усреднения для решения многоточечных краевых задач с нелинейным краевым условием для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной

В работах [1—3] метод усреднения для краевых задач обоснован для систем с медленными и быстрыми переменными, а потом и для систем стандартного вида (см. [4]) с линейным краевым условием. Данная работа является обобщением работы [4] для систем стандартного вида с нелинейным краевым условием.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{1}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=1}^{N} A_i x(t_i) = \Gamma(x(t_1), \ldots, x(t_N), \dot{x}(t_1), \ldots, \dot{x}(t_N), \varepsilon), \tag{2}$$

где $x, X, \Gamma \in R_n$, $A_i = (a_{jk}^{(i)})_1^n$, $t_i = t_1 + \alpha_i T$, $i = \overline{1, N}$, $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N = 1$, $T = L\varepsilon^{-1}$, $L = \mathrm{const} > 0$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} X(t, x, 0)\, dt = \overline{X}(x). \tag{3}$$

Тогда системе (1) ставим в соответствие усредненную систему

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \overline{X}(\xi(t)) \tag{4}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \xi(t_i) = \Gamma(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_N), \dot{\xi}(t_1), \ldots, \dot{\xi}(t_N), \varepsilon). \tag{5}$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ и $A = (a_{jk})_{lm}$, то по определению

$$\|x\| = \Big[\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2\Big]^{\frac{1}{2}}, \quad \|A\| = \Big[\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} a_{jk}^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть:*

1. *Функция* $X(t, x, y)$ *определена и непрерывна в области* $\Omega(t, x, y) = \Omega(t)\times\Omega(x)\times\Omega(y)$, *где* $\Omega(t) = [t_1, \infty)$, $t_1 = \text{const} \geqslant 0$, $\Omega(x)$ *и* $\Omega(y)$ — *некоторые открытые области пространства* R_n.

Функция $\Gamma(z, \varepsilon)$, $z = (z_1, \dots, z_{2N})$ *определена в области* $\Omega(z, \varepsilon) = \underbrace{\Omega(x)\times\ldots\times\Omega(x)}_{N}\times\underbrace{\Omega(y)\times\ldots\times\Omega(y)}_{N}\times\Omega(\varepsilon)$, *где* $\Omega(\varepsilon) = (0, \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 = \text{const} > 0$.

2. *Функции* $X(t, x, y)$ *и* $\Gamma(z, \varepsilon)$ *удовлетворяют соответственно в областях* $\Omega(t, x, y)$ *и* $\Omega(z, \varepsilon)$ *условиям*

$$\|X(t, x, y)\| \leqslant M, \ \|X(t, x, y) - X(t, x', y')\| \leqslant \lambda(\|x - x'\| + \|y - y'\|),$$

$$\|\Gamma(z, \varepsilon) - \Gamma(z', \varepsilon)\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \|z_i - z_i'\| + \mu_i \|z_{N+i} - z'_{N+i}\|,$$

где M, λ, λ_1, μ_i, $i = \overline{1, N}$, — *положительные постоянные*, λ_i, $i = 2, N$, *зависят от* ε, *функция* $b(\varepsilon) = \max\limits_{i} \lambda_i(\varepsilon)$ *непрерывна при достаточно малых значениях* ε *и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} b(\varepsilon) = 0$.

3. *Краевая задача* (1), (2) *имеет единственное, непрерывное решение* $x(t)$ *и* $x(t) \in \Omega(x)$ *при* $t \in [t_1, t_1 + T]$.

4. *В каждой точке* $x \in \Omega(x)$ *существует предел* (3), *причем функция* $\overline{X}(x)$ *непрерывна в области* $\Omega(x)$.

5. *Краевая задача* (4), (5) *имеет единственное, непрерывное решение* $\xi(t)$ *и* $\xi(t) \in \Omega(x)$ *при* $t \in [t_1, t_1 + T]$.

6. *Матрица* A_1 — *постоянная и* $\det A_1 \neq 0$.

7. *Матрицы* A_i, $i = \overline{2, N}$, *зависят от* ε, *функция* $d(\varepsilon) = \max\limits_{i} \|A_j(\varepsilon)\|$ *непрерывна при достаточно малых значениях* ε *и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} d(\varepsilon) = 0$.

8. *Выполнено неравенство* $\Big\|\Big(\sum\limits_{i=1}^{N} A_i\Big)^{-1}\Big\| \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i < 1$.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *для которого при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *на отрезке* $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + T$ *выполняется неравенство* $\|x(t) - \xi(t)\| < \eta$.

Доказательство. В силу условий теоремы выполняются равенства

$$x(t) = x_1 + \varepsilon \int_{t_1}^{t} X(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\, d\tau, \tag{6}$$

$$\xi(t) = \xi_1 + \varepsilon \int_{t_1}^{t} \overline{X}(\xi(\tau))\, d\tau, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(x_1 + \varepsilon\beta_i) = \Gamma(x_1, x_1 + \varepsilon\beta_2, \dots, x_1 + \varepsilon\beta_N, \dot{x}(t_1), \dots, \dot{x}(t_N), \varepsilon), \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(\xi_1 + \overline{\varepsilon\beta_i}) = \Gamma(\xi_1, \xi_1 + \varepsilon\overline{\beta}_2, \dots, \xi_1 + \varepsilon\overline{\beta}_N, \dot{\xi}(t_1), \dots, \dot{\xi}(t_N), \varepsilon), \tag{9}$$

где $x_1 = x(t_1)$, $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\beta_i = \int\limits_{t_1}^{t_i} X(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\, d\tau$, $\overline{\beta}_i = \int\limits_{t_1}^{t_i} \overline{X}(\xi(\tau))\, d\tau$, $i = \overline{1, N}$.

Вычитая (7) из (6), получаем

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \| x_1 - \xi_1 \| + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_1}^{t} [X(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) - \overline{X}(\xi(\tau))]\, d\tau \right\|. \quad (10)$$

Для второго слагаемого в правой стороне неравенства (10) справедлива оценка

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_1}^{t} [X(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) - \overline{X}(\xi(\tau))]\, d\tau \right\| \leqslant \varepsilon\lambda \int\limits_{t_1}^{t} \| x(\tau) - \xi(\tau) \|\, d\tau + $$
$$+ \varepsilon\lambda ML + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_1}^{t} [X(\tau, \xi(\tau), 0) - \overline{X}(\xi(\tau))]\, d\tau \right\|. \quad (11)$$

Нетрудно показать [5], что любому положительному числу ε можно поставить в соответствие функцию $a(\varepsilon, m)$ ($a(\varepsilon, m) \to 0$ при $m \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$), где m — натуральное число, для которой на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + T$ выполняется неравенство

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_1}^{t} [X(\tau, \xi(\tau), 0) - \overline{X}(\xi(\tau))]\, d\tau \right\| \leqslant a(\varepsilon, m). \quad (12)$$

Таким образом, для всех $t \in [t_1, t_1 + T]$ выполняется неравенство

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_1}^{t} [X(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) - \overline{X}(\xi(\tau))]\, d\tau \right\| \leqslant \varepsilon\lambda \int\limits_{t_1}^{t} \| x(\tau) - \xi(\tau) \|\, d\tau + $$
$$+ \varepsilon\lambda ML + a(\varepsilon, m). \quad (13)$$

Вычитая (9) из (8), после некоторых выкладок, получаем неравенство

$$\left(1 - \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)^{-1} \right\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right) \| x_1 - \xi_1 \| \leqslant \varepsilon \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)^{-1} \right\| \sum_{i=2}^{N} (\| A_i(\varepsilon) \| + $$
$$+ \lambda_i(\varepsilon)) \| \beta_i - \overline{\beta}_i \| + 2\varepsilon M \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)^{-1} \right\| \sum_{i=1}^{N} \mu_i. \quad (14)$$

Из (14), в силу условий теоремы 1, следует

$$\| x_1 - \xi_1 \| \leqslant \varepsilon h(\varepsilon) \sum_{i=2}^{N} \| \beta_i - \overline{\beta}_i \| + g(\varepsilon), \quad (15)$$

где

$$h(\varepsilon) = (b(\varepsilon) + d(\varepsilon)) \left(1 - \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)^{-1} \right\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right)^{-1} \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)^{-1} \right\|,$$

$$g(\varepsilon) = 2\varepsilon M \left(1 - \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)^{-1} \right\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right)^{-1} \left\| \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)^{-1} \right\| \sum_{i=1}^{N} \mu_i.$$

Имея в виду неравенства (10), (13) и (15), находим

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant c(\varepsilon,m)\left[1+h(\varepsilon)\left(N-1+\frac{\alpha\lambda L}{c(\varepsilon,m)}\sup_{t_1\leqslant t\leqslant t_1+T}\|x(t)-\xi(t)\|\right)\right]+$$
$$+\varepsilon\lambda\int_{t_1}^{t}\|x(\tau)-\xi(\tau)\|\,d\tau, \tag{16}$$

где $c(\varepsilon,m)=\varepsilon\lambda ML+a(\varepsilon,m)+g(\varepsilon)$, $\alpha=\sum_{i=2}^{N}\alpha_i$.

Положим $c(\varepsilon,m)\,u(t)=x(t)-\xi(t)$ и введем обозначение $\|u\|_T=$ $=\sup_{t_1\leqslant t\leqslant t_1+T}\|u(t)\|$.

Тогда (16) примет вид

$$\|u(t)\|\leqslant 1+h(\varepsilon)(N-1+\alpha\lambda L\|u\|_T)+\varepsilon\lambda\int_{t_1}^{t}\|u(\tau)\|\,d\tau. \tag{17}$$

Применяя к (17) неравенство Гронуолла — Беллмана, при $t\geqslant t_1$ получаем

$$\|u(t)\|\leqslant[1+h(\varepsilon)(N-1+\alpha\lambda L\|u\|_T)]\exp\{\varepsilon\lambda(t-t_1)\}.$$

Следовательно,

$$\|u\|_T\leqslant[1+h(\varepsilon)(N-1+\alpha\lambda L\|u\|_T)]\exp\{\lambda L\}. \tag{18}$$

Так как $\lim_{\varepsilon\to 0}h(\varepsilon)=0$, то существует число $\varepsilon_2>0$ такое, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ выполняется неравенство

$$\alpha\lambda Lh(\varepsilon)\exp\{\lambda L\}<1.$$

Тогда, решая (18) относительно $\|u\|_T$, при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ получаем

$$\|u\|_T\leqslant\frac{(1+h(\varepsilon)(N-1))\exp\{\lambda L\}}{1-\alpha\lambda Lh(\varepsilon)\exp\{\lambda L\}}=\Delta,$$

т. е. $\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant c(\varepsilon,m)\,\Delta$.

Выберем m и ε_3 таким образом, чтобы выполнялось неравенство $c(\varepsilon_3,m)\,\Delta<\eta$.

Тогда из этого неравенства при $\varepsilon_0=\min_{i=\overline{1,3}}\varepsilon_i$ следует утверждение теоремы 1.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t)=\varepsilon X\left(t,x(t),\dot{x}(t),\int_{t_1}^{t}\varphi(t,s,x(s),\dot{x}(s))\,ds\right) \tag{19}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=1}^{N}A_i x(t_i)=\Gamma(x(t_1),\ldots,x(t_N),\ \dot{x}(t_1),\ldots,\dot{x}(t_N),\varepsilon), \tag{20}$$

где $x,X,\Gamma\in R_n$, $\varphi\in R_m$, $A_i=(a_{jk}^{(i)})_1^n$, $t_i=t_1+\alpha_i T$, $i=\overline{1,N}$, $0=\alpha_1<\alpha_2<$ $<\ldots<\alpha_N=1$, $T=L\varepsilon^{-1}$, $L=\mathrm{const}$, а $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Пусть существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X\left(t,x,0,\int_{t_1}^{t}\varphi(t,s,x,0)\,ds\right)dt=\overline{X}(x). \tag{21}$$

Тогда системе (19) ставим в соответствие усредненную систему

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \overline{X}(\xi(t)) \tag{22}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \xi(t_i) = \Gamma(\xi(t_1), \dots, \xi(t_N), \dot{\xi}(t_1), \dots, \dot{\xi}(t_N), \varepsilon). \tag{23}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть:*

1. *Функция* $X(t, x, y, u)$ *определена и непрерывна в области* $\Omega(t, x, y, u) = \Omega(t) \times \Omega(x) \times \Omega(y) \times \Omega(u)$, *где* $\Omega(t) = [t_1, \infty)$, $t_1 \geqslant 0$, $\Omega(x)$, $\Omega(y)$ — *некоторые открытые области пространства* R_n, $\Omega(u) \equiv R_m$.

Функция $\varphi(t, s, x, y)$ *определена и непрерывна в области* $\Omega(t, s, x, y) = \Omega(t) \times \Omega(s) \times \Omega(x) \times \Omega(y)$, *где* $\Omega(s) = [t_1, \infty)$.

Функция $\Gamma(z, \varepsilon)$, $z = (z_1, \dots, z_{2N})$ *определена в области* $\Omega(z, \varepsilon) = \underbrace{\Omega(x) \times \dots \times \Omega(x)}_{N} \times \underbrace{\Omega(y) \times \dots \times \Omega(y)}_{N} \times \Omega(\varepsilon)$, *где* $\Omega(\varepsilon) = (0, \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 = \mathrm{const} > 0$.

2. *Функции* $X(t, x, y, u)$, $\varphi(t, s, x, y)$ *и* $\Gamma(z, \varepsilon)$ *удовлетворяют соответственно в областях* $\Omega(t, x, y, u)$, $\Omega(t, s, x, y)$ *и* $\Omega(z, \varepsilon)$ *условиям*

$$\| X(t, x, y, u) \| \leqslant M,$$

$$\| X(t, x, y, u) - X(t, x', y', u') \| \leqslant \lambda (\| x - x' \| + \| y - y' \| + \| u - u' \|),$$

$$\| \varphi(t, s, x, y) - \varphi(t, s, x', y') \| \leqslant \sigma(t, s) (\| x - x' \| + \| y - y' \|),$$

$$\| \Gamma(z, \varepsilon) - \Gamma(z', \varepsilon) \| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \| z_i - z'_i \| + \mu_i \| z_{N+i} - z'_{N+i} \|,$$

где M, λ, λ_1, μ_i, $i = \overline{1, N}$, — *положительные постоянные*, λ_i, $i = \overline{2, N}$, *зависят от* ε, *функция* $b(\varepsilon) = \max_i \lambda_i(\varepsilon)$ *непрерывна при достаточно малых значениях* ε, $\lim_{\varepsilon \to 0} b(\varepsilon) = 0$ *и*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t - t_1} \int_{t_1}^{t} d\tau \int_{t_1}^{\tau} \sigma(\tau, s)\, ds = 0.$$

3. *Краевая задача* (19), (20) *имеет единственное, непрерывное решение* $x(t)$ *и* $x(t) \in \Omega(x)$ *при* $t \in [t_1, t_1 + T]$.

4. *В каждой точке* $x \in \Omega(x)$ *существует предел* (21). *Функция* $\overline{X}(x)$ *непрерывна в области* $\Omega(x)$.

5. *Краевая задача* (21), (22) *имеет единственное, непрерывное решение* $\xi(t)$ *и* $\xi(t) \in \Omega(x)$ *при* $t \in [t_1, t_1 + T]$.

6. *Матрица* A_1 — *постоянная и* $\det A_1 \neq 0$.

7. *Матрицы* A_i, $i = \overline{2, N}$, *зависят от* ε, *функция* $d(\varepsilon) = \max_i \| A_i(\varepsilon) \|$ *непрерывна при достаточно малых значениях* ε *и* $\lim_{\varepsilon \to 0} d(\varepsilon) = 0$.

8. *Выполнено неравенство* $\left\| \left(\sum_{i=1}^{N} A_i \right)^{-1} \right\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i < 1$.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *для которого при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *на отрезке* $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + T$ *выполняется неравенство* $\| x(t) - \xi(t) \| < \eta$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байнов Д. Д. Асимптотические формулы для одной краевой задачи.— Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 1. Изд. Ин-та математики АН УССР, 1970, с. 45—54.
2. Байнов Д. Д. Решение некоторых краевых задач методом усреднения на базе асимптотики, построенной для задачи Коши. Известия на Математическия институт на БАН. Т. 15. 1974, с. 5—20.
3. Милушева С. Д. Применение метода усреднения к одной двухточечной краевой задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.— УМЖ, 1974, **26**, № 3, с. 338—347.
4. Милушева С. Д., Байнов Д. Д. Применение метода усреднения для решения многоточечных краевых задач с линейным краевым условием для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, не разрешенных относительно производной.— Сообщ. АН ГрузССР, 1975, **78**, № 3, с. 545—548.
5. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1971. 278 с.

София, Высший машинно-электротехнический институт,
Пловдивский университет

Поступила в редакцию
9.XII.1975 г.