УДК 517.929.2

Е. Ю. Романенко

Представление решений квазилинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа в случае резонанса

Рассматривается квазилинейное дифференциально-функциональное уравнение

$$P(t, x(t), x(g(t)))\, \dot{x}(g(t)) + Q(t, x(t), x(g(t)))\, \dot{x}(t) = R(t, x(t), x(g(t))), \qquad (1)$$

где функции $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, P, Q, $R: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ являются аналитическими в области $G \subseteq \mathbf{R}^3$. Исследование уравнения (1) в окрестности особых точек*, как известно (см., например, [1]), сводится к исследованию уравнения с линейным сдвигом аргумента

$$P(t, x(t), x(at))\, \dot{x}(at) + Q(t, x(t), x(at))\, \dot{x}(t) = R(t, x(t), x(at)), \quad a \neq 0 \pm 1. \qquad (2)$$

Поэтому ограничимся изучением уравнения (2).

---

* Под особыми точками уравнения (1) понимаются точки (α, β) плоскости (t, x), в которых отклонение аргумента $\Delta(t) = t - g(t)$ обращается в нуль.

Поведение решений* уравнения (2) в окрестности его особых точек $(0, \beta)$ характеризуется величинами

$$b = b(\beta) = a\frac{Q(0, \beta, \beta)}{P(0, \beta, \beta)}, \quad \nu = \nu(\beta) = \frac{\ln|b(\beta)|}{\ln|a|}, \tag{3}$$

предполагается, что $P(0, \beta, \beta) = p \neq 0$, $Q(0, \beta, \beta) = q \neq 0$. В [2] для случая $a^n + b \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$ (отсутствие резонанса), получено представление общего решения уравнения (2) в окрестности точки $(0, \beta)$. В данной работе строится общее решение уравнения (2) в случае резонанса, когда $a^n + b = 0$ для некоторого целого $n > 0$ (при этом $\nu(\beta) = n$).

Теорема**. *Пусть $a^n + b = 0$ при некотором целом $n > 0$. Существует окрестность $U_\beta = \{(t, x), |t| < t_\beta, |x - \beta| < \delta_\beta\}$ особой точки $(0, \beta)$, в которой всякое решение $x(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = \beta$, может быть представлено в виде*

$$x(t) = \psi_\beta(t, t^n \ln t) + \begin{cases} L_\beta\left[t^n \gamma_1\left(\dfrac{\ln t}{\ln|a|}\right)\right], & t > 0, \\ L_\beta\left[|t|^n \gamma_2\left(\dfrac{\ln|t|}{\ln|a|}\right)\right], & t < 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $\psi_\beta(t, u)$ — аналитическая функция, $\psi_\beta(0, 0) = \beta$; оператор $L_\beta : C^k(-t_\beta, t_\beta)\setminus\{0\} \to C^k(-t_\beta, t_\beta)\setminus\{0\}$, $k = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$, имеет вид

$$L_\beta[y] = y + o(|y|), \ y \to 0; \tag{5}$$

$\gamma_1(\tau)$, $\gamma_2(\tau)$ *— некоторые периодические функции класса C^1, причем если*

$$\begin{aligned} &a > 0, \ b < 0, \ \text{то} \ \gamma_1(\tau) = \gamma_1(\tau + 1), \ \gamma_2(\tau) = \gamma_2(\tau + 1); \\ &a < 0, \ b < 0, \ \text{то} \ \gamma_1(\tau) = \gamma_2(\tau + 1) = \gamma_1(\tau + 2); \\ &a < 0, \ b > 0, \ \text{то} \ \gamma_1(\tau) = -\gamma_2(\tau + 1) = \gamma_1(\tau + 2). \end{aligned} \tag{6}$$

Решение $x(t) = \psi_\beta(t, t^n \ln|t|)$ будем называть главным решением.

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 в работе [2]. Пусть $t > 0$, $a > 0$, $b < 0$. В остальных случаях доказательство аналогично.

При отсутствии резонанса главное решение (см. [2]) имеет вид $\psi_\beta(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \beta_m t^m$, где $\beta_m = \dfrac{P_m}{m(a^m + b)}$. В случае резонанса главное решение нельзя представить в таком виде, так как $a^n + b = 0$ и знаменатель коэффициента при t^n обращается в нуль. Поэтому будем искать функцию ψ_β и оператор L_β в виде, несколько отличном от предложенного в [2]:

$$\begin{gathered} \psi_\beta(t, t^n \ln t) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \beta_{lm} t^{nl+m} (\ln t)^l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{n}\right]} \alpha_k^{(s)} (\ln t)^s t^k, \\ L_\beta[t^n \gamma] = \sum_{l=1,m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l-1} A_{lm}^{(s)}[\gamma] (\ln t)^l t^{nl+m}, \end{gathered} \tag{7}$$

---

* Под решениями уравнения (2), определенными в некоторой окрестности V точки $t = 0$ (за исключением, возможно, самой точки $t = 0$), понимаются функции класса C^1, обращающие уравнение (2) в тождество на множестве $V' = \{t : t \in V, at \in V\}$.

** Формулировка этой теоремы приведена в [2] без доказательства.

где β_{lm} — постоянные, $A_{10}^{(0)}[\gamma]=\gamma$, $A_{lm}^{(s)}$ — операторы, отображающие периодические функции в периодические с тем же периодом, $[\,]$ — знак целой части числа. Иначе говоря, будем искать решения уравнения (2) в виде

$$x(t)=\beta+\sum_{l+m\geqslant 1}^{\infty}\sum_{s=0}^{l}B_{lm}^{(s)}\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)(\ln t)^s t^{nl+m}, \tag{8}$$

где $B_{lm}^{(s)}(\tau)$ — 1-периодические функции ($B_{lm}^{(l)}(\tau)\equiv\beta_{lm}$), так что

$$A_{lm}^{(s)}[\gamma(\tau)]=B_{lm}^{(s)}(\tau). \tag{9}$$

1. Домножим обе части уравнения (2) на функцию $\mu(t, x(t), x(at))$, удовлетворяющую условиям, указанным в [2]. Уравнение запишется в виде

$$P'(t, x(t), x(at))\,\dot{x}(at)+Q'(t, x(t), x(at))\,\dot{x}(t)=R'(t, x(t), x(at)). \tag{10}$$

Функции P', Q', R' являются аналитическими в окрестности точки $(0, \beta, \beta)$ и разлагаются в равномерно сходящиеся степенные ряды с коэффициентами p_{ijk} $(p_{000}=p)$, q_{ijk} $(q_{000}=q)$, r_{ijk} соответственно. Подставляя эти ряды, а также ряд (8) в уравнение (10), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$\beta_{lm}=\frac{H_{lm}^{(l)}}{(nl+m)(a^{nl+m}+b)},\ \beta_{0n}=0,\ \beta_{10}=\frac{H_{10}^{(1)}}{na^{n-1}p\ln a}, \tag{11}$$

$B_{10}^{(0)}\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)=\gamma\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)$ — произвольная 1-периодическая функция;

$$\frac{1}{\ln a}\dot{B}_{lm}^{(s)}\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)+(nl+m)B_{lm}^{(s)}\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)=\frac{H_{lm}^{(s)}\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)}{a^{nl+m}+b}, \tag{12}$$

где $H_{lm}^{(s)}$ являются полиномами относительно p_{ijk}, q_{ijk}, r_{ijk}, $\beta_{l_1m_1}$, $B_{l_1m_1}^{(s_1)}$, $\dot{B}_{l_1m_1}^{(s_1)}$, $i+j+k\leqslant l+m-1$, $s+1\leqslant s\leqslant l$, $l_1+m_1\leqslant l+m-1$. (В (11) и (12) все выражения в знаменателях отличны от нуля). Соотношение (12) — это обыкновенное дифференциальное уравнение, имеющее единственное периодическое решение

$$B_{lm}^{(s)}\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)=\frac{t^{-(nl+m)}}{a^{nl+m}+b}\int_0^t H_{lm}^{(s)}\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)t^{nl+m-1}dt. \tag{13}$$

Следовательно, ряд (8) с коэффициентами (11), (12) является формальным решением уравнения (2).

2. Положим

$$P''(t, u, v)=\sum_{i+j+k\geqslant 1}^{\infty}|p_{ijk}|\,t^i(u-\beta)^j(v-\beta)^k-p,\qquad Q''(t, u, v)=$$

$$=\sum_{i+j+k\geqslant 1}^{\infty}|q_{ijk}|\,t^i(u-\beta)^j(v-\beta)^k-q,\qquad F(t, u, v)=\int_{(\beta,\beta)}^{(u,v)}\frac{1}{a}P''dv+Q''du.$$

Равномерная сходимость ряда (8) доказывается таким же образом, как и в [2], при помощи вполне интегрируемого уравнения (общее решение которого легко находится)

$$\frac{d}{dt}[F(t, x(t), x(at))]=-\frac{M}{\left(1-\frac{t}{\rho}\right)\left(1+\frac{F(t, x(t), x(at))}{\rho}\right)}, \tag{14}$$

одно из решений которого представляется абсолютно и равномерно сходящимся рядом $\sum_{l,m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{l} c_{lm}^{(s)}(\ln t)^s t^{nl+m}$, мажорирующим ряд (8) при надлежащем выборе постоянных M и ρ.

Последовательно дифференцируя ряд (8), нетрудно показать, что $x(t)\in C^k(0, T]$, если $\gamma(\tau)\in C^k$, $k = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$.

Таким образом, ряд (8) представляет собой семейство решений уравнения (2), зависящее от произвольной 1-периодической функции $\gamma(\tau)\in C^1$.

3. Остается показать, что всякое решение $\varphi(t)$ уравнения (2), для которого $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = \beta$, можно представить при $t > 0$ в виде $\varphi(t) = \psi_\beta(t, t^n\ln t) + L_\beta\left[t^n\gamma_\varphi\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)\right]$, где $\gamma_\varphi(\tau)$ — некоторая 1-периодическая функция. Так как в силу формулы(12) операторы $A_{lm}^{(s)}$ имеют такую же структуру, как и операторы B_{lm} в [2], то доказательство этого утверждения проводится точно так же, как в [2].

Итак, (4) является представлением общего решения уравнения (2) в окрестности особой точки $(0, \beta)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любого решения $x(t)$ уравнения* (2), *проходящего через точку* $(0, \beta)$, $x\neq\psi_\beta$, $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\frac{|x(t)-\psi_\beta(t, t^n\ln|t|)|}{|t|^n} < \infty$.

Следствие 2. *Множество решений $x(t)$ уравнения* (2), *проходящих через точку* $(0, \beta)$, а) *содержит в классе $C^k[0, T]$ семейство решений, зависящее от произвольной периодической функции класса C^k, если $k < n$*; б) *не содержит решений класса $C^k[0, T]$, если $k\geqslant n$ и $P_n\neq 0$*; в) *содержит в классе $C^k[0, T]$ однопараметрическое семейство решений, если $k\geqslant n$ и $P_n = 0$.*

Замечание 1. Решения (8) уравнения (2) можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{[k/n]} D_k^{(s)}\left[\gamma\left(\frac{\ln|t|}{\ln|a|}\right)\right](\ln|t|)^s t^k, \tag{15}$$

где $D_k^{(s)}$ — операторы, отображающие периодические функции в периодические с тем же периодом, причем $D_k^{([k/n])}[\gamma]\equiv\text{const}$, $D_n^{(0)}[\gamma] = \gamma$.

Замечание 2. В доказанной теореме рассматривался резонанс при $n > 0$. В работе [1] показано, что представление решений (4) ((8)) для линейных дифференциально-функциональных уравнений ($l = 1$) справедливо и в случае $n = 0$. Для нелинейных дифференциально-функциональных уравнений этот факт, вообще говоря, не имеет места. Это легко усмотреть, например, из (15).

В заключение отметим, что подобным образом можно в аналогичной форме строить общее решение квазилинейных систем дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа. Однако при этом возникают значительные технические трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полищук В. М., Шарковский А. Н. Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа.— Дифференц. уравнения, 1973, 9, № 9, с. 1627—1645.
2. Романенко Е. Ю. Представление решений квазилинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа.— УМЖ, 1974, 26, № 6, с. 749—761.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
16.XII. 1975 г.