УДК 519.21

Т. М. Алиев, М. Ф. Черная

Условие эргодичности одной цепи Маркова с непрерывной компонентой

Пусть $\{\xi_t, \eta_t\}$, $t \geqslant 0$, — однородная цепь Маркова с фазовым пространством $\{0^+, 1^\pm, 2^\pm, \ldots\} \times R^+$, где $R^+ = \{x : x \geqslant 0\}$ и обладающий следующими переходными вероятностями при $\Delta \downarrow 0$:

$$(0^+, x) \xrightarrow{\Delta} \begin{cases} (0^+, x+\Delta) : 1 - \lambda(x)\Delta + o(\Delta), \\ (k^+, 0) : \lambda_k(x)\Delta + o(\Delta), \quad k \geqslant 1, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} (k^+, x) \xrightarrow{\Delta} \begin{cases} (k^+, x+\Delta) : 1 - [\lambda^+(x) + \mu^-(x) + \nu(x)]\Delta + o(\Delta), \\ ((k+r)^+, x+\Delta) : \lambda_r^+(x)\Delta + o(\Delta), \quad r \geqslant 1, \\ ((k-1)^+, 0) : \nu(x)\Delta + o(\Delta), \\ (k^-, 0) : \mu^-(x)\Delta + o(\Delta), \end{cases} \\ (k^-, x) \xrightarrow{\Delta} \begin{cases} (k^-, x+\Delta) : 1 - [\lambda^-(x) + \mu^+(x)]\Delta + o(\Delta), \\ ((k+r)^-, x+\Delta) : \lambda_r^-(x)\Delta + o(\Delta), \quad r \geqslant 1, \\ (k^+, 0) : \mu^+(x)\Delta + o(\Delta) \end{cases} \\ (k = 1, 2, \ldots), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\nu(x)$, $\mu^\pm(x)$, $\lambda_r^\pm(x)$ $(r \geqslant 1)$ — неотрицательные функции, причем

$$\lambda^\pm(x) = \sum_1^\infty \lambda_k^\pm(x) \text{ и } \lambda(x) = \sum_1^\infty \lambda_k(x).$$

Процессы такого вида полезны при исследовании систем массового обслуживания с ненадежными приборами при довольно общих условиях на поток требований и характер обслуживания.

В данной работе, следуя схеме, предложенной в [1], исследуется эргодическое распределение процесса. Выясняется вероятностный смысл условия эргодичности. Приведены примеры.

1. Предположим, что процесс $\{\xi_t, \eta_t\}$ эргодичен. Согласно [2]

$$\lim_{t\to\infty} P\{\xi_t = k^\pm, \ \eta_t < x\} = \int_0^x p_k^\pm(u)\,du,$$

где плотности $p_k^\pm(x)$ подлежат определению. Используя (1) и (2), для стационарных плотностей $p_k^{\pm}(x)$ имеем следующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
p_0^+(x+\Delta) = p_0^+(x)\,(1-\lambda(x)\,\Delta + o(\Delta)),\\
p_k^+(x+\Delta) = p_k^+(x)\,[1-(\lambda^+(x)+\mu^-(x)+\nu(x))\,\Delta] +\\
+\Delta \sum_{j=1}^{k-1} p_j^+(x)\,\lambda_{k-j}^+(x) + o(\Delta),\\
p_k^-(x+\Delta) = p_k^-(x)\,[1-(\lambda^-(x)+\mu^+(x))\,\Delta] +\\
+\Delta \sum_{j=1}^{k-1} p_j^-(x)\,\lambda_{k-j}^-(x) + o(\Delta).
\end{gathered} \tag{3}
$$

Обозначим

$$
\lambda_0^+(x) = -[\lambda^+(x)+\mu^-(x)+\nu(x)], \quad \lambda_0^-(x) = -[\lambda^-(x)+\mu^+(x)].
$$

Тогда из (3) получим

$$
\frac{dp_0^+(x)}{dx} = -\lambda(x)\,p_0^+(x), \quad \frac{dp_k^{\pm}(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{k-j}^{\pm}(x)\,p_j^{\pm}(x), \quad k \geqslant 1. \tag{4}
$$

Введем производящие функции

$$
P^{\pm}(x,\theta) = \sum_{1}^{\infty} p_k^{\pm}(x)\,\theta^k,
$$

$$
\lambda^{\pm}(x,\theta) = \sum_{1}^{\infty} \lambda_k^{\pm}(x)\,\theta^k, \qquad \lambda(x,\theta) = \sum_{1}^{\infty} \lambda_k(x)\,\theta^k.
$$

В производящих функциях соотношение (4) выглядит следующим образом:

$$
\frac{\partial P^{\pm}(x,\theta)}{\partial x} = \lambda^{\pm}(x,\theta)\,P^{\pm}(x,\theta),
$$

откуда

$$
P^{\pm}(x,\theta) = C^{\pm}(\theta)\,E^{\pm}(x,\theta),
$$

где $C^{\pm}(\theta)$ — степенной ряд относительно переменной θ, а $E^{\pm}(x,\theta) = \exp\left\{\int_0^x \lambda^{\pm}(u,\theta)\,du\right\}$. Для $p_0(x) \equiv p_0^+(x)$ имеем $p_0(x) = C_0E(x)$, где $E(x) = \exp\left\{-\int_0^x \lambda(u)\,du\right\}$.

Легко понять, что константы $p_0(0)$ и $p_k^{\pm}(0)$, $k \geqslant 1$, связаны с плотностями $p_r^{\pm}(x)$, $r \geqslant 0$, следующими соотношениями:

$$
p_0(0) = \int_0^{\infty} p_1^+(x)\,\nu(x)\,dx,
$$

$$
p_k^+(0) = \int_0^{\infty} p_{k+1}^+(x)\,\nu(x)\,dx + \int_0^{\infty} p_0^+(x)\,\lambda_k(x)\,dx + \int_0^{\infty} p_k^-(x)\,\mu^+(x)\,dx, \tag{5}
$$

$$
p_k^-(0) = \int_0^{\infty} p_k^+(x)\,\mu^-(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}
$$

Запишем соотношения (5) и (6) в производящих функциях:

$$C^{+}(\theta)=\frac{1}{\theta}\int_0^\infty \nu(x)\,[C^{+}(\theta)E^{+}(x,\theta)-p_1^{+}(x)\,\theta]\,dx+$$

$$+C_0\int_0^\infty E(x)\,\lambda(x,\theta)\,dx+C^{-}(\theta)\int_0^\infty E^{-}(x,\theta)\,\mu^{+}(x)\,dx,$$

$$C^{-}(\theta)=C^{+}(\theta)\int_0^\infty E^{+}(x,\theta)\,\mu^{-}(x)\,dx.$$

Учитывая выражение для $C^{-}(\theta)$ и то, что $C_0=p_0(0)$, для $C^{+}(\theta)$ получим выражение

$$C^{+}(\theta)=\frac{C^{+}(\theta)}{\theta}\int_0^\infty E^{+}(x,\theta)\,\nu(x)\,dx+C_0\left[\int_0^\infty E(x)\,\lambda(x,\theta)\,dx-1\right]+$$

$$+C^{+}(\theta)\int_0^\infty E^{+}(x,\theta)\,\mu^{-}(x)\,dx\int_0^\infty E^{-}(x,\theta)\,\mu^{+}(x)\,dx,$$

откуда

$$C^{+}(\theta)=\frac{\left[1-\int_0^\infty E(x)\,\lambda(x,\theta)\,dx\right]C_0}{\frac{1}{\theta}\int_0^\infty E^{+}(x,\theta)\,\nu(x)\,dx+\int_0^\infty E^{+}(x,\theta)\,\mu^{-}(x)\,dx\times\int_0^\infty E^{-}(x,\theta)\,\mu^{+}(x)\,dx-1}. \qquad (7)$$

Поскольку

$$l(\theta)=C_0\int_0^\infty E(x)\,dx+C^{+}(\theta)\int_0^\infty E^{+}(x,\theta)\,dx+C^{-}(\theta)\int_0^\infty E^{-}(x,\theta)\,dx$$

— производящая функция стационарного распределения, то $l(1)=1$. Это дает возможность находить C_0. Зная C_0, можно определить функции $C^{\pm}(\theta)$, и, значит, производящие функции $P^{\pm}(x,\theta)$.

2. Найдем условие эргодичности для процесса $\{\xi_t,\eta_t\}$, $t\geqslant 0$. В выражении (7) введем обозначения:

$$U(\theta)=1-\int_0^\infty E(x)\,\lambda(x,\theta)\,dx,$$

$$V(\theta)=\frac{1}{\theta}\int_0^\infty E^{+}(x,\theta)\,\nu(x)\,dx+\int_0^\infty E^{+}(x,\theta)\,\mu^{-}(x)\,dx\times$$

$$\times\int_0^\infty E^{-}(x,\theta)\,\mu^{+}(x)\,dx-1.$$

Предположим, что

$$\int_0^\infty \lambda(x)\,dx=\infty,\quad \int_0^\infty \mu^{+}(x)\,dx=\infty,\quad \int_0^\infty (\nu(x)+\mu^{-}(x))\,dx=\infty.$$

Легко проверить, что

$$U(1) = V(1) = 0.$$

Поэтому, согласно правилу Лопиталя, для $C^+(1)$ имеем

$$\frac{1}{C_0} C^+(1) = U'(1)/V'(1).$$

Но $U'(1) = -\int_0^\infty E(x)\dot{\lambda}(x, 1)\,dx < 0$. Следовательно, и $V'(1) < 0$.

$$V'(1) = -\int_0^\infty E^+(x, 1)\,\nu(x)\,dx + \int_0^\infty \dot{E}^+(x, 1)\,\nu(x)\,dx + \int_0^\infty \dot{E}^+(x, 1)\,\mu^-(x)\,dx \times$$

$$\times \int_0^\infty E^-(x, 1)\,\mu^+(x)\,dx + \int_0^\infty E^+(x, 1)\,\mu^-(x)\,dx \int_0^\infty \dot{E}^-(x, 1)\,\mu^+(x)\,dx$$

(здесь $\dot{z}(x, 1)$ указывает производную функции $z(x, \theta)$ при $\theta = 1$).

Так как

$$\dot{E}^+(x, 1) = E^+(x, 1)\int_0^x \dot{\lambda}^+(u, 1)\,du,$$

то

$$\int_0^\infty [\nu(x) + \mu^-(x)]\,\dot{E}^+(x, 1)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^x \dot{\lambda}^+(u, 1)\,du\right)(\nu(x) +$$

$$+ \mu^-(x))\,E^+(x, 1)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^x \dot{\lambda}^+(u, 1)\,du\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\int_0^x [\nu(u) + \mu^-(u)]\,du\right\}(\nu(x) + \mu^-(x))\,dx. \tag{8}$$

Пусть ξ^+ — случайная величина с плотностью, равной

$$\exp\left\{-\int_0^x [\nu(u) + \mu^-(u)]\,du\right\}(\nu(x) + \mu^-(x))\,dx.$$

Тогда (8) можно записать так:

$$\int_0^\infty (\nu(x) + \mu^-(x))\,\dot{E}^+(x, 1)\,dx = \mathbf{M}\int_0^{\xi^+} \dot{\lambda}^+(u, 1)\,du$$

($\mathbf{M}$ — символ математического ожидания).

Аналогично, для $\int_0^\infty \dot{E}^-(x, 1)\,\mu^+(x)\,dx$ получим

$$\int_0^\infty \mu^+(x)\,\dot{E}^-(x, 1)\,dx = \mathbf{M}\int_0^{\xi^-} \dot{\lambda}^-(u, 1)\,du,$$

где ξ^- — случайная величина с плотностью $\exp\left\{-\int_0^x \mu^+(u)\,du\right\}\mu^+(x)\,dx$.

Учитывая, что

$$\int_0^\infty E^-(x, 1)\,\mu^+(x)\,dx = 1,$$

из условия $V'(1) < \theta$ имеем

$$\mathbf{M}\int_0^{\xi^+} \dot{\lambda}^+(u, 1)\, du + \int_0^{\infty} E^+(x, 1)\,\mu^-(x)\, dx\, \mathbf{M}\int_0^{\xi^-} \dot{\lambda}^-(u, 1)\, du < \int_0^{\infty} E^+(x, 1)\,\nu(x)\, dx.$$

Так как

$$\mathbf{M}\frac{\mu^-(\xi^+)}{\nu(\xi^+) + \mu^-(\xi^+)} = \int_0^{\infty} E^+(x, 1)\,\mu^-(x)\, dx,$$

$$\mathbf{M}\frac{\nu(\xi^+)}{\nu(\xi^+) + \mu^-(\xi^+)} = \int_0^{\infty} E^+(x, 1)\,\nu(x)\, dx,$$

то в результате имеем следующее условие эргодичности:

$$\mathbf{M}\int_0^{\xi^+} \dot{\lambda}^+(u, 1)\, du + \mathbf{M}\frac{\mu^-(\xi^+)}{\nu(\xi^+) + \mu^-(\xi^+)}\,\mathbf{M}\int_0^{\xi^-} \dot{\lambda}^-(u, 1)\, du <$$

$$< \mathbf{M}\frac{\nu(\xi^+)}{\nu(\xi^+) + \mu^-(\xi^+)}. \qquad (9)$$

Выясним вероятностный смысл условия (9) в терминах теории массового обслуживания.

Пусть в однолинейную систему обслуживания с ожиданием поступает неординарный пуассоновский поток требований интенсивностью $\lambda^{\pm}(x)$, $\lambda^{\pm}(x) = \sum_1^{\infty} \lambda_k^{\pm}(x)$. Время обслуживания имеет интенсивность $\nu(x)$.

За время обслуживания прибор может выходить из строя, после чего восстанавливается (ремонт). Интенсивности выхода из строя и восстановление прибора равны $\mu^-(x)$ и $\mu^+(x)$ соответственно.

Состояние $(0^+, x)$ означает, что в рассматриваемый момент времени прибор свободен, исправлен и время простоя прибора равно x.

Состояние (k^+, x), $k \geqslant 1$, означает, что в рассматриваемый момент времени в системе имеется k требований, прибор исправлен (неисправлен) и требование, находящееся на обслуживании, обслуживает x единиц времени (и время ремонта, прошедшее к данному моменту, равно x). Ясно, что функционирование такой системы описывается процессом $\{\xi_t, \eta_t\}$, $t \geqslant 0$, введенным в п. 1. Если начальным состоянием процесса является $(k^+, 0)$ $(k \geqslant 1)$, то ξ^+ будет указывать время до момента окончания обслуживания или поломки прибора; если же начальное состояние — $(k^-, 0)$ $(k \geqslant 1)$, то ξ^- — время окончания ремонта прибора.

Из предыдущих рассуждений получаем, что

$$P\{\xi^+ > x\} = \exp\left\{-\int_0^x [\nu(u) + \mu^-(u)]\, du\right\},$$

$$P\{\xi^- > x\} = \exp\left\{-\int_0^x \mu^+(u)\, du\right\}.$$

Далее, если $\xi^+ = x$, то $\dfrac{\nu(x)}{\nu(x) + \mu^-(x)}$ — вероятность обслуживания требования, а величина $\dfrac{\mu^-(x)}{\nu(x)+\mu^-(x)}$ — вероятность выхода из строя прибора. Функция $\dot\lambda^\pm(u, 1)$ — интенсивность поступления за время $\xi^\pm$.

Пусть Z — среднее число требований, поступивших за время обслуживания одного требования. Тогда при $\xi^+ = x$ величина $Z = Z_x$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$Z_x = \int_0^x \frac{\nu(x)}{\nu(x)+\mu^-(x)}\dot\lambda^+(u, 1)\,du +$$

$$+ \frac{\mu^-(x)}{\nu(x)+\mu^-(x)}\left[\int_0^x \dot\lambda^+(u, 1)\,du + \mathbf{M}\int_0^{\xi^-}\dot\lambda^-(u, 1)\,du + Z\right].$$

Усредняя это соотношение по x, имеем

$$Z = \mathbf{M}\int_0^{\xi^+} \frac{\nu(\xi^+)}{\nu(\xi^+)+\mu^-(\xi^+)}\dot\lambda^+(u, 1)\,du +$$

$$+ \mathbf{M}\frac{\mu^-(\xi^+)}{\nu(\xi^+)+\mu^-(\xi^+)}\left[\int_0^{\xi^+}\dot\lambda^+(u, 1)\,du + \mathbf{M}\int_0^{\xi^-}\dot\lambda^-(u, 1)\,du + Z\right],$$

откуда

$$Z = \frac{\mathbf{M}\displaystyle\int_0^{\xi^+}\dot\lambda^+(u, 1)\,du + \mathbf{M}\frac{\mu^-(\xi^+)}{\nu(\xi^+)+\mu^-(\xi^+)}\mathbf{M}\int_0^{\xi^-}\dot\lambda^-(u, 1)\,du}{\mathbf{M}\dfrac{\nu(\xi^+)}{\nu(\xi^+)+\mu^-(\xi^+)}} < 1.$$

Таким образом, для эргодичности рассматриваемой системы необходимо, чтобы среднее число требований, поступивших за время обслуживания одного требования, было меньше единицы.

Пример 1. В систему обслуживания поступает неординарный пуассоновский поток требований интенсивностью λ, $\lambda = \sum\limits_1^\infty \lambda_k$. Обслуживающий прибор ненадежен. Интенсивности выхода из строя и восстановления прибора равны ν и π соответственно. Время обслуживания распределено показательно с интенсивностью μ.

В этом случае

$$\nu(x) = \mu, \quad \mu^-(x) = \nu, \quad \mu^+(x) = \pi, \quad \dot\lambda^+(u, 1) = \dot\lambda^-(u, 1) = \lambda'(1).$$

Поэтому, согласно (9), имеем

$$\lambda'(1)\,\mathbf{M}\xi^+ + \frac{\nu}{\nu+\mu}\lambda'(1)\,\mathbf{M}\xi^- < \frac{\mu}{\nu+\mu}.$$

Поскольку ξ^+ и ξ^- распределены экспоненциально с параметрами $(\nu+\mu)$ и π соответственно, то

$$\mathbf{M}\xi^+ = \frac{1}{\nu+\mu}, \quad \mathbf{M}\xi^- = \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно,

$$\lambda'(1)\left(\frac{1}{\nu+\mu}+\frac{\nu}{\nu+\mu}\,\frac{1}{\pi}\right)<\frac{\mu}{\nu+\mu}$$

или

$$\lambda'(1)<\frac{\mu}{1+\dfrac{\nu}{\pi}}\,.$$

Последний результат получен в работе [3].

Пример 2. В систему обслуживания поступает неординарный пуассоновский поток требований интенсивностью λ, $\lambda=\sum_{1}^{\infty}\lambda_k$. Время обслуживания распределено по произвольному закону $G(x)$. В этом случае

$$\lambda_k^+(x)=\lambda_k\ (k\geqslant 1),\quad \nu(x)=\frac{G'(x)}{1-G(x)},\quad \mu^-(x)=0.$$

Согласно (9), имеем $\lambda'(1)\,\mathbf{M}\xi^+<1$. Поскольку случайная величина ξ^+ имеет плотность, равную

$$P\{\xi^+\in dx\}=\exp\left\{-\int_0^x \nu(u)\,du\right\}\nu(x)\,dx,$$

то

$$P\{\xi^+>x\}=\exp\left\{-\int_0^x \nu(u)\,du\right\}.$$

Имеем

$$\mathbf{M}\xi^+=\int_0^\infty P\{\xi^+>x\}\,dx=\int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^x\frac{G'(u)}{1-G(u)}\,du\right\}dx=$$

$$=\int_0^\infty[1-G(x)]\,dx=\mathbf{M}\tau,$$

где τ — время обслуживания требования и $\xi^+\overset{\circ}{=}\tau$ (знак «$\overset{\circ}{=}$» указывает одинаковую распределенность). В результате получим $\lambda'(1)<\dfrac{1}{\mathbf{M}\tau}$.

Пример 3. В случае классической схемы $M_\lambda/M_\mu/1$

$$\lambda'(1)=\lambda,\quad \mathbf{M}\tau=\frac{1}{\mu}.$$

Тогда $\lambda/\mu<1$.

Этот факт приведен в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ежов И. И. Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс. II. — УМЖ, 1966, **18**, № 1, с. 48—65.
2. Захарин А. М. Об одном классе монотонных процессов с вмешательством случая. Препринт ИК-71-26. К., 1971. 15 с.
3. Алиев Т. М. Условие эргодичности однолинейной системы массового обслуживания с ненадежным прибором. — Теория вероятностей и математическая статистика. Изд-во Киев. ун-та, 1976, вып. 14, с. 7—12.
4. Гнеденко Б. В., Коваленко И. И. Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1966. 431 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
26.XI. 1976 г.