УДК 519.21

Г. П. Буцан

Стохастические полугруппы с обобщенными операторными значениями

Данная статья является продолжением работ [1, 2], посвященных интегральному представлению стохастической полугруппы X_s^t. Все обозначения этой работы полностью заимствованы из них и результаты ее технически доказываются почти аналогично [1, 2], поскольку являются рассмотрениями понятий этих работ на более общем объекте. Поэтому доказательства многих приведенных утверждений будут в дальнейшем опускаться, а вместо них будут приводиться соответствующие указания, как эти доказательства можно получить из [1 и 2].

1. s-случайные операторы. В работе [3] было введено понятие s-случайного оператора (см. также [4]): случайная величина $\xi(x)$, $x \in H$, со значениями в H, называется s-случайным оператором, если она удовлетворяет условию $\forall x, y \in H$, $\forall \alpha, \beta \in R_1$:

1. $\xi(\alpha x + \beta y) = \alpha \xi(x) + \beta \xi(y) \pmod P$.

В [3] исследованы свойства s-случайного оператора и в частности показано, что множество Y_H всех s-операторов с конечной нормой $\{\}\,\xi\,\{\} = \sqrt{\sup\limits_{(x,x)=1} M(\xi(x), \xi(x))}$ будет банаховым пространством в этой норме. Далее введено произведение $\xi_1 \times \xi_2$ двух s-случайных операторов и показано, что в случае, когда ξ_1 и ξ_2 независимы и $\{\}\,\xi_1\,\{\}$, $\{\}\,\xi_2\,\{\} < \infty$, $\xi_1 \times \xi_2$ будет определено однозначно и является s-случайным оператором с конечной $\{\}\cdot\{\}$ нормой. Кроме того, если $\{\xi_n^1\}$ и $\{\xi_n^2\}$ — независимые последовательности случайных операторов (r-случайных операторов, см. [3]), сходящиеся в $\{\}\cdot\{\}$ к ξ_1 и ξ_2 соответственно, то $\xi_n^1 \times \xi_n^2 \to \xi_1 \times \xi_2$ в $\{\}\cdot\{\}$. Этим воспользуемся для доказательства нужных нам неравенств для независимых s-случайных операторов ξ и η:

$$M(\xi \times \eta(x), \xi \times \eta(x)) \leqslant \{\}\,\xi\,\{\}^2 M(\eta(x), \eta(x)) = |M\xi^* \times \xi|\,(M\eta^* \times \eta x, x). \quad (1)$$

$$\{\}\,\xi \times \eta\,\{\} \leqslant \{\}\,\xi\,\{\} \cdot \{\}\,\eta\,\{\}. \quad (2)$$

Пусть $\xi_n \to \xi$ и $\eta_n \to \eta$ в $\{\}\cdot\{\}$ и $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — независимые последовательности r-случайных операторов, тогда

$$M(\xi_n \times \eta_n(x), \xi_n \times \eta_n(x)) = M(\xi_n^* \times \xi_n \times \eta_n(x), \eta_n(x)) =$$

$$= M((M\xi_n^* \times \xi_n) \times \eta_n(x), \eta_n(x)) = M(\sqrt{M\xi_n^* \times \xi_n} \times \eta(x), \sqrt{M\xi_n^* \times \xi_n} \times \eta(x)) \leqslant$$

$$\leqslant |M\xi_n^* \times \xi_n|\, M(\eta_n(x), \eta_n(x)) = \{\}\,\xi_n\,\{\}^2 (M\delta_n^* \times \eta_n x, x).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство (1); доказательство неравенства (2) очевидно.

2. MS-и AS-полугруппы. Пусть значениями у полугруппы X_s^t будут s-случайные операторы и она удовлетворяет условиям 1, 2, 4, 5 работы [1], а условие 3 этой же работы заменим следующим:

2. $\forall t, s \in [0, \infty)$ $\{\}\,X_s^t\,\{\} < \infty$.

Назовем X_s^t MS-полугруппой.

Обозначим $F_s^x(t) = M((X_s^t - E)x, (X_s^t - E)x) < \infty$. Как и в [1], легко проверить, что выполняются неравенства $\forall x \in H$:

$$0 \leqslant F_r^x(t) - F_r^x(\tau) \leqslant F_s^x(t) - F_s^x(\tau), \quad 0 \leqslant s \leqslant r \leqslant \tau \leqslant t < \infty, \quad (3)$$

$$0 \leqslant F_t^x(u) - F_s^x(u) \leqslant F_t^x(v) - F_s^x(v), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u \leqslant v < \infty, \quad (4)$$

вполне аналогичные неравенствам 6 и 7 работы [1].

Пусть $\{t_k^n\}$ — разбиение отрезка $[s, t]$, $k = \overline{1, n}$, а $\{t_i^{nk}\}$, $i = \overline{1, m^{nk}}$, — разбиение отрезка $[t_k^n, t_{k+1}^n]$.
Используя условия 5,8 работы [1] и соотношение (1), как и в [1], можно показать, что

$$M\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} - E) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{m^{nk}-1}(X_{t_i^{nk}}^{t_{i+1}^{nk}} - E)\right)\right)(x), \left(\sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} - E) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{m^{nk}-1}(X_{t_i^{nk}}^{t_{i+1}^{nk}} - E)\right)\right)(x)\right) \leqslant \sup_{k=\overline{1,n}} \sup_{t_k^n \leqslant \tau \leqslant t_{k+1}^n} |M(X_{t_k^n}^{\tau} - E)^* (X_{t_k^n}^{\tau} - E)| \times$$

$$\times F_s^x(t) = \varepsilon_n M((X_s^t - E)(x), (X_s^t - E)(x)),$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ по условию 5 работы [1]. Поэтому

$$\{\} \sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} - E) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m^{nk}-1}(X_{t_i^{nk}}^{t_{i+1}^{nk}} - E)\{\}^2 \leqslant \varepsilon_n \{\} X_s^t - E\{\} \to 0,\ n \to \infty$$

и следовательно $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(X_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} - E)$ сходится в норме $\{\}\cdot\{\}$ к некоторому s-случайному оператору Y_s^t. Как и выше, легко проверить, что Y_s^t удовлетворяет условиям:

3. $\forall x \in H$ $Y_s^t(x) = Y_s^{\tau}(x) + Y_{\tau}^t(x)$ $(\mathrm{mod}\, P)$ (мы полагаем $Y_s^s(x) = 0$ $(\mathrm{mod}\, P)$).

4. $MY_s^t = 0$ $\forall t, s \in [0, \infty)$.

5. $Y_s^t(x)$ имеет независимые аддитивные приращения при каждом $x \in H$.

6. $\forall t, s \in [0, \infty)$ $\{\} Y_s^t \{\} < \infty$.

Кроме того, функция $\psi_s^x(t) = M(Y_s^t(x), Y_s^t(x))$ будет монотонной и удовлетворяет соотношениям:

$$M((Y_s^t - Y_s^{\tau})(x), (Y_s^t - Y_s^{\tau})(x)) = \psi_s^x(t) - \psi_s^x(\tau), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t < \infty. \quad (5)$$

$$M((Y_s^t - Y_{\tau}^t)(x), (Y_s^t - Y_{\tau}^t)(x)) = \psi_s^x(t) - \psi_{\tau}^x(t), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t < \infty. \quad (6)$$

$$\{\} Y_s^t - Y_s^{\tau} \{\}^2 = |M(Y_s^t - Y_s^{\tau})^* \times (Y_s^t - Y_s^{\tau})| = \{\} Y_{\tau}^t \{\}^2 \to 0,\ t - \tau \to 0. \quad (7)$$

Назовем Y_s^t AS-полугруппой, соответствующей MS-полугруппе X_s^t.

3. Стохастические интегралы по AS-полугруппам и интегральные уравнения. По Y_s^t можно строить различные стохастические интегралы от неупреждающих функций, удовлетворяющих тем или иным условиям. Рассмотрим следующие возможности.

Прежде всего, это построение, аналогичное [5, гл. VIII, § 2] : $\forall x \in H$ стохастический интеграл $\int\limits_s^t f(\tau) \times dY_s^{\tau}(x)$ строится для всех неупреждающих случайных функций $f(\tau)$ со значениями в X_H, удовлетворяющих условию:

7. $\int\limits_s^t |f(\tau)|^2 \, d\psi_s^x(\tau) < \infty$.

Этот стохастический интеграл будет s-случайным оператором. Легко проверить, используя неравенства (1) и (2), что для функций $f(\tau)$, удовлетворяющих условию $\forall x \in H$:

8. $\int\limits_s^t M|f(\tau)|^2 \, d\psi_s^x(\tau) < \infty$,

выполняются соотношения $\forall x \in H$:

$$M \int\limits_s^t f(\tau) \times dY_s^\tau(x) = 0, \tag{8}$$

$$M \left(\int\limits_s^t f(\tau) \times dY_s^\tau(x), \quad \int\limits_s^t f(\tau) \times dY_s^\tau(x) \leqslant \int\limits_s^t M \,|\, f(\tau) \,|^2 \, d\psi_s^x(\tau). \tag{9}$$

Ясно также, что, например в случае $M \,|\, f(\tau) \,|^2 < C < \infty$, $\{\} \int\limits_s^t f(\tau) \times dY_s^\tau(\cdot) \{\} < \infty$.

Другой подход предложил А. В. Скороход в работе [4] в том случае, когда $\forall x \in H \;\; Y_s^t(x)$ является мартингалом (а не обязательно имеет независимые аддитивные приращения), правда однородным и непрерывным (mod P) мартингалом.

Следующая конструкция представляется более подходящей для наших целей: пусть $\mathfrak{N}_s^t$ — множество всех неупреждающих функций $\{f(\tau)\}$ на $[s, t]$, значениями которых будут s-случайные операторы и которые удовлетворяют условию:

9. $f(\tau)$ непрерывна в $\{\} \cdot \{\}$ по τ на $[s, t]$.

Стохастический интеграл $\int\limits_s^t f(\tau) \times dY_s^\tau(\cdot)$ определяется как предел римановых сумм $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(t_k^n) \times Y_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}(\cdot)$ в норме $\{\} \cdot \{\}$. Используя неравенства (1), (2) и условие 9, легко показать, что этот предел существует и является s-случайным оператором с конечной $\{\} \cdot \{\}$ нормой.

Рассмотрим теперь уравнение

$$x_s^t = E + \int\limits_s^t x_s^\tau \times dY_s^\tau \tag{10}$$

в классе функций из $\mathfrak{N}_s^t$. Так же, как и в [1, с. 14, 15], используя условия 2, 3 и 5 работы [1], можно показать, что X_s^t является решением этого уравнения в классе $\mathfrak{N}_s^t$. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема. *Пусть X_s^t — MS-полугруппа, тогда она является решением уравнения* (10), *где* $Y_s^t = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (X_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} - E)$ — *AS-полугруппа и предел понимается в норме* $\{\} \cdot \{\}$.

Замечание 1. Из теоремы легко следует основная теорема работы [4] и в более общем случае.

Замечание 2. Не ясно, будет ли всякое решение уравнения (10) для произвольной AS-полугруппы Y_s^t удовлетворять условию 1 работы [1]. Более того, в классе функций из $\mathfrak{N}_s^t$, удовлетворяющих условию 1 работы [1] и являющихся r-операторами, единственность решения уравнения (10) также не ясна, поскольку не ясно имеет ли это решение вид типа 25 работы [1]. Здесь, по-видимому, потребуются дополнительные ограничения на функцию $\{\} Y_s^t \{\}^2$ (и соответственно $\{\} X_s^t - E \{\}^2$) типа ограниченности вариации этих функций.

Конечно в однородном случае это условие будет выполняться, поскольку для однородной AS-полугруппы Y_s^t, аналогично доказательству леммы 1 работы [3], можно показать, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\{\}\, Y_0^{\Delta t}\, \{\}^2}{\Delta t} = C < \infty$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m^n}\{\}\, Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\, \{\}^2 = C$. Поэтому, аналогично [1], итерируя уравнение

$$x_s^t = E + \int_s^t x_s^\tau \times dY_s^\tau,$$

легко показать, что оно имеет решение вида

$$x_s^t = E + \sum_{n=1}^{\infty}\int_s^t\int_s^{t_1}\dots\int_s^{t_{n-1}} dY_s^{t_n}\times\dots\times dY_s^{t_1},$$

где указанный ряд сходится в силу оценки $\{\}\int_s^t\int_s^{t_1}\cdots\int_s^{t_{n-1}} dY_s^{t_n}\times\cdots\times dY_s^{t_1}\, \{\}^2 \leqslant \frac{C^n}{n!}(t-s)^n$.

Замечание 3. В однородном случае, используя результаты работы [3], как и в [1], можно показать, что если X_s^t и U_s^t — две независимые MS-полугруппы, а Y_s^t и V_s^t — соответствующие им AS-полугруппы, то

$$Y_s^t + V_s^t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left((X\boxtimes U)_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} - E\right) = W_s^t$$

и предел понимается в норме $\{\}\cdot\{\}$. Т. е. MS-полугруппа $Z_s^t = (X\boxtimes U)_s^t$ является решением уравнения

$$Z_s^t = E + \int_s^t Z_s^\tau \times dW_s^\tau(\cdot).$$

Замечание 4. Для однородной MS-полугруппы X_s^t без условия 4 работы [1] (т. е. $MX_s^t = e^{A(t-s)}$ (см. [3])), как и в [1], можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(X_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} - E\right) = Y_s^t + A(t-s),\ A\in X_H,$$

где $Y_s^t = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(X_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\boxtimes e^{-A\Delta t_k^n} - E\right)$ и X_s^t удовлетворяет уравнению

$$e^{-A(t-s)}\times X_s^t = E + \int_s^t X_s^\tau\times dY_s^\tau\times e^{-A(\tau-s)}.$$

Замечание 5. В работе [6] сделана попытка получить результаты, аналогичные теореме данной работы, в случае банаховых колец. Однако ее следует признать неудачной из-за имеющихся ошибок. Так, уже в случае банахова кольца X_H стохастический интеграл $Y(t)$, определяемый в [6], не будет случайной величиной со значениями в X_H, а будет s-случайным оператором. Поэтому большинство последующих оценок неверно, а пространство $\mathfrak{M}_t$ не полно. Далее строится стохастический интеграл по $Y(t)$. Но поскольку $Y(t)$ — s-случайный оператор, то для построения такого интеграла нужно по крайней мере определить произведение s-случайных операторов и проверить все необходимые его свойства, т. е. по сути проделать всю работу, выполненную в [3, 4] и в данной работе. Кроме того, работа [6] изобилует и другими ошибками и неточностями.

Конечно, изложенные результаты (в случае $\{\}\cdot\{\}$), по-видимому, можно перенести на банаховы кольца. Но для этого потребуется строить соответствующие «обобщенные» конструкции, используя множества положительных функционалов, и рассматривать соответствующие «s-случайные элементы». Такая работа представляется интересной и, по-видимому, нетрудной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буцан Г. П. Об интегральном представлении стохастических полугрупп. — УМЖ, 1977, **29**, № 1, с. 15—22.
2. Буцан Г. П. Некоторые свойства интегрального представления стохастической полугруппы. — УМЖ, 1977, **29**, № 2, с. 166—171.
3. Буцан Г. П. О некоторых свойствах s полугрупп. — Теория вероятностей и математическая статистика, Изд-во Киев. ун-та, 1976, вып. 15, с. 13--21.
4. Скороход А. В. Операторные мартингалы и стохастические полугруппы. — В кн.: Теория случайных процессов, «Наук. думка», 1976, вып. 4, с. 86—94.
5. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965. 654 с.
6. Чани А. С. Представление непрерывных мультипликативных процессов. — В кн.: Поведение систем в случайных средах, Изд. Ин-та кибернетики АН УССР, 1974, с. 69—76.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
7.VII. 1975 г.