УДК 513.83

И. З. Клейнер

Операторы замыкания и границы в топологических пространствах

Пусть A — подмножество топологического пространства X (в дальнейшем будем просто говорить, что дана пара $(X; A)$). Задача К. Куратовского [1, с. 48] состоит в следующем. К множеству применяются операторы замыкания и дополнения (обозначать их будем соответственно через r и c) и их всевозможные комбинации. Требуется найти наибольшее возможное количество множеств, получающихся при этом из A. Это количество равно, как известно, 14. Ю. Р. Гайда и А. Э. Еременко [2] показали, что если к A применять операторы r, c и f (f — оператор границы, $A^f = A^r \cap A^{cr}$), то из A получается максимум 34 множества.

В дальнейшем множество, являющееся результатом применения к A некоторой композиции операторов $u, v, \ldots, w$, будем называть $(u, v, \ldots, w)$-образом множества A. Оператор внутренности обозначим $0: A^0 = A^{crc}$.

1. Множества, имеющие максимальное количество (r, c)- и (r, c, f)-образов. Имеют место следующие факты.

Предложение 1. *Подмножество A топологического пространства X имеет 14 (r, c)-образов тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) $A^{0r0} \not\subset A$; 2) $A^{r0} \not\subset A^{0r}$; 3) $A \not\subset A^{r0r}$; 4) $A^{r0} \neq A^{r0r}$; 5) $A^{0r} \neq A^{0r0}$.

Предложение 2. *Если множество A имеет 14 (r, c)-образов и $A^{0r} \subset A^{r0}$, то A имеет 34 (r, c, f)-образа.*

Предложение 3. *Пусть A имеет 14 (r, c)-образов. Тогда A имеет 34 (r, c, f)-образа, если, и только если, выполняются хотя бы два из трех следующих условий*:

$$6)\ A^{0r} \cap A^{r0} \neq A^{0r0};\ 7)\ A^{0r} \cup A^{r0} \neq A^{r0r};\ 8)\ A^{f0r} \not\supset A^{0rf}.$$

Предложение 3 следует дополнить следующим замечанием.

Существуют пары $(X; A)$ такие, что A имеет 14 $(r; c)$-образов, но не удовлетворяет ни одному из условий 6) — 8) или удовлетворяет одному, или двум из них. Для случаев, когда выполняется условие 8), такие множества есть в $\mathbf{R}$. Построим пространства для остальных случаев.

Рассмотрим множество $T = \left\{(x; y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0 \vee \left(x = 0;\ \frac{1}{y} \in \mathbf{N}\right)\right\}$ как подпространство $\mathbf{R}^2$; определим $A \subset T$ следующим образом;

$$A = \Big\{(x; y) \in \mathbf{R}^2/(x \in \{-2\} \cup (]-1; 1[\cap \mathbf{Q}) \cup [1; 2[\cup]2; +\infty[;\ y = 0) \vee \\ \vee \left(x = 0;\ \frac{1}{2y} \in \mathbf{N}\right)\Big\}.$$

Подмножество A пространства T имеет 34 $(r; c; f)$-образа; оно удовлетворяет условиям 6) и 7), но не условию 8). Кроме того, $A^{0r} \not\subset A^{r0}$. Пусть $T^{(1)} = T \setminus \{(0; -1)\}$; $T^{(2)} = T \setminus \{(0; 1)\}$; $T^{(3)} = T^{(1)} \cap T^{(2)}$. Тогда A как подмножество $T^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяет соответственно: условию 6), но не условиям 7) и 8); условию 7), но не условиям 6) и 8); ни условиям 6), ни 7), ни 8). Во всех случаях A удовлетворяет условиям 1) — 5). Количество (r, c, f)-образов A равно соответственно 32, 32 и 30. Вообще, если множество имеет 14 (r, c)-образов, то у него не менее 28 (r, c, f)-образов, причем число 28 «достигается» лишь в том случае, если условия 6) и 7) не выполняются, а условие 8) имеет место. Более того, должно выполняться равенство $A^{f0r} = A^{r0r} \setminus A^{0r} = A^{r0} \setminus A^{0r0}$.

Множеств с такими свойствами нет в $\mathbf{R}$, как и в любом связном пространстве. Такие множества есть в пространстве $\mathbf{R} \setminus \{0\}$: например, множество $(\mathbf{Q} \cap]-\infty; 0[) \cup \{1\} \cup [2; 3[\cup]3; 4[$ в пространстве $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ имеет 14 $(r; c)$-образов и 28 $(r; c; f)$-образов.

2. Пространства, не содержащие множеств, имеющих максимальное количество $(r; c)$-образов. Согласно предложению 1, любое подмножество такого пространства не удовлетворяет хотя бы одному из условий 1) — 5). Очевидно, рассматривать столь общую ситуацию нецелесообразно. Однако можно рассмотреть классы топологических пространств $X(i)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, по принципу: $X \in X(i)$ тогда и только тогда, когда $\forall A \subset X$: не (i), $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Классы $X(4)$ и $X(5)$ совпадают: это класс экстремально несвязных пространств (см. [3, с. 342]).

1. Класс $X(1)$ $(= X(3))$. Принадлежность пространства X классу $X(1)$ равносильна условию $\forall A \subset X: A^r = A^{r0}$, т. е. тому, что в X все открытые множества замкнуты. А в таком пространстве любое множество A имеет не более 10 (r, c, f)-образов: $A, A^r, A^0, A^f, A^{rf} = \varnothing$ и их дополне-

ния. Пример, показывающий точность этой оценки: пространство $\{a; b; c; d\}$ с базой топологии $\{\{a\}; \{b\}; \{c; d\}\}$ принадлежит классу $X(1)$; его подмножество $\{a; c\}$ имеет 10 $(r; c; f)$-образов.

2. Класс $X(2)$. Условие $A^{r0} \subset A^{r0}$ равносильно тому, что $A^{r0r} = A^{0r}$.

Если же любое подмножество A пространства X удовлетворяет условию $A^{r0r} = A^{0r}$, то у этого множества не более 20 $(r; c; f)$-образов: A, A^{r}, A^{r0}, A^{0}, A^{0r}, A^{f}, A^{rf}, A^{0f}, $A^{0rf} = A^{r0f}$, $\varnothing$ и их дополнения. Пространство $\{a; a'; b; b'; c\}$ с базой топологии $\{\{c\}; \{b; c\}; \{b'; c\}; \{a; b; c\}; \{a'; b'; c\}\}$ принадлежит классу $X(2)$, а его подмножество $\{a; b'; c\}$ имеет 20 различных $(r; c; f)$-образов.

3. Класс $X(4)$. Любое подмножество экстремально несвязного пространства имеет не более 22 $(r; c; f)$-образов: A; A^{r}; A^{r0}; A^{0}; A^{0r}; A^{f}; A^{ff}; A^{f0}; A^{rf}; A^{0f}; $\varnothing$ и их дополнения. Построим пару $(Y; W)$, где Y экстремально несвязно, а W имеет ровно 22 $(r; c; f)$-образа. Точки Y-точки $\mathbf{R}^2$; замкнутыми в Y объявляются все множества $U \bigcup V$, где U конечно, а V — объединение произвольного множества прямых, параллельных Ox. Далее,

$$W = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x < 0; y \in [0; 1[) \vee (x > 0; y = 0)\} \cup \{(0; 2)\}.$$

В заключение приведем пример подмножества прямой, у которого все 34 $(r; c; f)$-образа не только различны, но и попарно не гомеоморфны:

$$M = \{0\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{10}\left[j; j + \frac{1}{2}\right]\right) \cup \left(Q \cap \left(\bigcup_{j=101}^{200}\left]j; j + \frac{1}{2}\right[\right)\right) \cup$$

$$\bigcup ([1000; 2001] \setminus \{1001; 1002; \ldots; 2000\}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Куратовский К. Топология. Т. 1. М., «Мир», 1966. 594 с.
2. Гайда Ю. Р., Еременко А. Э. Об операторе границы в булевых алгебрах с замыканием. — УМЖ, 1974, **26**, № 6, с. 806—809.
3. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., «Наука», 1974. 423 с.

Кировоград

Поступила в редакцию
23.II. 1976 г.