УДК 517.946

*В. А. Краснов, А. С. Фохт*

# Теорема вложения для присоединенных функций Лежандра и ее приложение

В данной статье для присоединенных функций Лежандра

$$P_\nu^k(\cos\theta) = P_\nu^k(z) = \frac{1}{2^\nu \nu!}(1 - z^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^\nu}{dz^\nu}(z^2 - 1)^\nu$$

доказывается следующая теорема вложения:

$$J(s) \leqslant C\{J^{\frac{s}{r}}(r) J^{1-\frac{s}{r}}(0) + J(0)\}, \tag{1}$$

где $s$ и $r$ — натуральные числа, $s = 1, 2, \ldots, r$,

$$J(s) = \left\{\int_0^\pi \left[\frac{d^s}{d\theta^s} P_\nu^k(\cos\theta)\right]^2 \sin\theta d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Непосредственная проверка показывает, что неравенство (1) не является следствием известных теорем вложения как весовых, доказанных А. С. Фохтом в [1]:

$$|D^{\bar{s}}f|_{p_s, s+\alpha} \leqslant C_1 \{|D^{\bar{r}}f|^{\tau}_{p_r, r+\alpha} |f|^{1-\tau}_{p_0,\alpha} + |f|_{p_0,\alpha}\} \tag{2}$$

при $(p_s)^{-1} = (1-\tau)p_0^{-1} + \tau p_r^{-1}$, так и без веса, доказанных Л. Ниренбергом в [2]:

$$|D^{\bar{s}}f|_{p_s} \leqslant C_2 [|D^{\bar{r}}f|^{\tau}_{p_r} |f|^{1-\tau}_{p_0} + |f|_{p_0}] \tag{3}$$

при $p_s^{-1} = (1-\tau)p_0^{-1} + \tau\left(\frac{1}{p_r} - \frac{r}{n}\right) + \frac{s}{n}$; здесь и в (2) и в (3)

$$1 < p_0 < p_r < \infty, \quad s\tau^{-1} < \tau < 1, \quad \bar{s} = \{s_1, \ldots, s_n\}, \quad s = s_1 + \ldots + s_n,$$

$$|D^{\bar{s}}f|_{p_s} = \left\{\int\limits_g |D^{\bar{s}}f|^{p_s} dx\right\}^{\frac{1}{p_s}}, \quad |D^{\bar{s}}f| = \sum_s \left|\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}}\right|,$$

$$|D^{\bar{s}}f|_{p_s, \gamma_s} = \left\{\int\limits_g |D^{\bar{s}}f|^{p_s} t^{p_s \gamma_s} dx\right\}^{\frac{1}{p_s}}.$$

Доказательству неравенства (1) предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$J^2(s) \leqslant J^2(s-1) + J(s+1)\,J(s-1) \tag{4}$$

*при* $2(s-1) < k$.

Доказательство. Проинтегрируем по частям интеграл

$$\int\limits_0^\pi \left(\frac{d^s P_\nu^k}{d\theta^s}\right)^2 \sin\theta d\theta = -\int\limits_0^\pi \frac{d^{s-1}P_\nu^k}{d\theta^{s-1}} \left\{\frac{d^{s+1}P_\nu^k}{d\theta^{s+1}} \sin\theta + \frac{d^s P_\nu^k}{d\theta^s} \cos\theta\right\} d\theta \tag{5}$$

Но

$$\int\limits_0^\pi \frac{d^{s-1}P_\nu^k}{d\theta^{s-1}} \frac{d^s P_\nu^k}{d\theta^s} \cos\theta d\theta = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \left(\frac{d^{s-1}P_\nu^k}{d\theta^{s-1}}\right)^2 \sin\theta d\theta. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем

$$\int\limits_0^\pi \left(\frac{d^s P_\nu^k}{d\theta^s}\right)^2 \sin\theta d\theta \leqslant \left\{\int\limits_0^\pi \left(\frac{d^{s-1}P_\nu^k}{d\theta^{s-1}}\right)^2 \sin\theta d\theta\right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_0^\pi \left(\frac{d^{s+1}P_\nu^k}{d\theta^{s+1}}\right)^2 \sin\theta d\theta\right\}^{1/2} + \int\limits_0^\pi \left(\frac{d^{s-1}P_\nu^k}{d\theta^{s-1}}\right)^2 \sin\theta d\theta.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть дано, что*

$$A^2 < C\left(1 + \sum_{i=1}^q A^{\alpha_i} B^{\beta_i}\right),$$

*где* $A, B, C > 0$; $\alpha_i, \beta_i \geqslant 0$; $\alpha_i + \beta_i = 2$, $q$ — *натуральное число; тогда имеет место неравенство*: $A^2 < \widetilde{C}(1 + B^\sigma)$, где $\widetilde{C}$ — *положительная константа, зависящая от* $A$ *и* $B$ *и* $\sigma = \max\limits_i \frac{2\beta_i}{2-\alpha_i} < 2$. Доказательство леммы 2 дано в работе [3].

Теперь приступим к доказательству формулы (1). Проведем доказательство по индукции, опуская при этом константы. Положив в формуле (1) $s = 1$, получим

$$J(1) \leqslant J(0) + J^{1/2}(0)\, J^{1/2}(2),$$

что соответствует уже доказанной формуле (4) при $r = 2$, $s = 1$. Предположим, что формула (4) верна при некотором $r$ для $s = 1, \ldots, r - 1$

$$J(s) \leqslant J(0) + J^{1-\frac{s}{r}}(0)\, J^{\frac{s}{r}}(r) \tag{7}$$

и, исходя из этого, докажем, что формула (4) верна и для $r + 1$ при $s = 1, \ldots, r$. Запишем эту формулу:

$$J(s) \leqslant J(0) + J^{1-\frac{s}{r+1}}(0)\, J^{\frac{s}{r+1}}(r+1). \tag{8}$$

Сначала покажем, что формула (8) верна при $s = r$; для этого, положив в формуле (4) $s = r$, получим

$$J(r) \leqslant J^{1/2}(r+1)\, J^{1/2}(r-1) + J(r-1). \tag{9}$$

Оценим далее $J(r-1)$ в формуле (9) с помощью неравенства (7) при $s = r - 1$; получим

$$J(r) \leqslant J^{1/2}(r+1)\, J^{1/2}(0) + J^{1/2}(r+1)\, J^{1/2r}(0)\, J^{\frac{r-1}{2r}}(r) + J(0) + J^{1/2}(0)\, J^{\frac{r-1}{r}}(r). \tag{10}$$

Введем обозначения $A = \dfrac{J(r)}{J(0)}$, $B = \dfrac{J(r+1)}{J(0)}$ и перепишем неравенство (10) следующим образом:

$$A^2 \leqslant B + BA^{\frac{r-1}{r}} + 1 + A^{\frac{2(r-1)}{r}}. \tag{11}$$

Отсюда в силу леммы 2 при $\sigma = \dfrac{2r}{r+1}$ получаем $A^2 \leqslant 1 + B^{\frac{2r}{r+1}}$ т. е. формулу (8) при $s = r$: $J(r) \leqslant J(0) + J^{\frac{1}{r+1}}(0)\, J^{\frac{r}{r+1}}(r+1)$.

Допустим теперь, что формула (8) верна при $s = r - 1, \ldots, r - j$. Покажем отсюда, что формула (8) верна и при $s = r - j - 1$. С этой целью запишем формулу (4) для $s = r - j - 1$:

$$J(r-j-1) \leqslant J^{1/2}(r-j-2)\, J^{1/2}(r-j) + J(r-j-2). \tag{12}$$

Далее выразим $J(r-j-2)$ через $J(r)$ с помощью неравенства (7):

$$J(r-j-2) \leqslant J(0) + J^{\frac{j+2}{r}}(0)\, J^{\frac{r-j-2}{r}}(r). \tag{13}$$

Теперь выразим $J(r-j)$ через $J(r+1)$ по формуле (8), которая при $s = r - j$ остается еще справедливой в силу предположения индукции

$$J(r-j) \leqslant J(0) + J^{\frac{j+1}{r+1}}(0)\, J^{\frac{r-j}{r+1}}(r+1). \tag{14}$$

Кроме того, выразим $J(r)$ через $J(r+1)$ по той же формуле (8):

$$J(r) \leqslant J(0) + J^{\frac{1}{r+1}}(0)\, J^{\frac{r}{r+1}}(r+1). \tag{15}$$

Подставляя оценки (12) — (14) в формулу (15) и используя лемму 2 при $\sigma = \dfrac{2(r-j-1)}{r+1}$ и тех же $A$ и $B$, получаем:

$$J(r-j-1) \leqslant \{J(0) + J^{\frac{j+1}{r+1}}(0)\, J^{\frac{r-j}{r+1}}(r+1)\} \times$$

$$\times \{J(0) + J^{\frac{j+2}{r}}(0)\,[J(0) + J^{\frac{1}{r+1}}(0)\,J^{\frac{r}{r+1}}(r+1)]^{\frac{r-j-2}{2}}\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ J(0) + J^{\frac{j+2}{r}}(0)\,\{J(0) + J^{\frac{1}{r+1}}(0)\,J^{\frac{r}{r+1}}(r+1)\}^{\frac{r-j+2}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant J(0) + J^{1-\frac{r-j-1}{r+1}}(0)\,J^{\frac{r-j-1}{r+1}}(r+1).$$

Неравенство (11) доказано.

Применим доказанную теорему вложения для доказательства точности полученных в работе [4] асимптотических оценок:

$$J(s) \leqslant O(\nu^{k+s-\frac{1}{2}}),$$

используя при этом то, что точность оценок при $s = 0$ и $s = 1$ известна, т. е. $J(0) = O(\nu^{k-\frac{1}{2}})$ и $J(1) = O(\nu^{k+\frac{1}{2}})$. В самом деле, из неравенства (1) для любого $r \geqslant 2$ при $s = 1$ имеем:

$$J(r) \geqslant \{[J(1) - J(0)]\,J^{\frac{1}{r}-1}(0)\}^{r} = O(\nu^{k+r-\frac{1}{2}}).$$

Это и требовалось доказать.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Фохт А. С. Интегральные оценки обобщенных производных решений уравнений эллиптического типа второго порядка в метрике $L_p$ и некоторые теоремы вложения, связанные с ними. — Тр. Математического ин-та АН СССР, 1972, **117**, с. 300—311.
2. Nirenberg L. An extended interpolation inequality (Estratto dagli). Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, classe di Scienze, 1966, **20**, fasc. 4, p. 733—737.
3. Фохт А. С. Некоторые неравенства для решений уравнений эллиптического типа и их производных в метрике $L_2$. — Тр. Математического ин-та АН СССР, 1965, **77**, с. 168—191.
4. Фохт А. С. Оценки производных присоединенных функций Лежандра в метрике $L_2$.— Дифференц. уравнения, 1969, **5**, № 1, с. 154—158.
5. Фохт А. С. Интегральные оценки производной гармонической функции на $N$-мерной области в метрике $L_p$ и некоторые ее приложения. — Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 7, с. 1329—1332.
6. Краснов В. А., Фохт А. С. Интегральные оценки дробных производных решений линейных уравнений эллиптического типа и их производных в метрике $L_2$. I.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 6, с. 1042—1053.



Московский
инженерно-физический институт



Поступила в редакцию
12.IV. 1976 г.