УДК 517.949.2

Ю. А. Митропольский, Нгуен Кхак Лан

О колебаниях систем с запаздыванием, зависящим от состояния системы

Рассмотрим систему с запаздыванием, зависящим от искомой функции, входящим не только в слабо нелинейные, но и в существенно нелинейные члены уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2(\tau)x+f_1(\tau,x(t-\Delta))=\varepsilon F_1^*\left(\tau,x,x(t-\Delta),\frac{dx}{dt}\frac{dx(t-\Delta)}{dt},\varepsilon\right), \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta}{dt}=\varepsilon F_2\left(\tau,x,\frac{dx}{dt},\Delta,\varepsilon\right),$$

где ε — малый положительный параметр, $\tau=\varepsilon t$ — медленно изменяющийся параметр.

Предположим, что

1) функции $F_1^*(\tau,x,x_\Delta,\dot{x},\dot{x}_\Delta,\varepsilon)$, $F_2(\tau,x,\dot{x},\Delta,\varepsilon)$ и $f(\tau,x_\Delta)$ ограничены и имеют необходимое число производных по всем аргументам в некоторой области;

2) уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2(\tau)x+f(\tau,x_\theta)=0, \quad (2)$$

где $\tau=\text{const}$, $\Delta=\theta=\text{const}$, имеет периодическое по t периода $2\pi/\omega(\tau,a)$ решение $x=z(\tau,\theta,a,t)$, причем $\omega(\tau,a)\neq n\lambda(\tau)$;

3) имеет место равенство

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega}\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_\Delta}\right|_{x_\Delta=z(\tau,\theta,a,t)}dt=0. \quad (3)$$

Построим приближенное решение системы (1) с помощью метода усреднения [1, 2].

Перепишем систему (1) в виде

$$\frac{dx}{dt}-\lambda y=0,$$

$$\frac{dy}{dt}+\lambda x+f(\tau,x_\Delta)=\varepsilon F_1(\tau,x,x_\Delta,y,y_\Delta,\varepsilon), \quad (4)$$

$$\frac{d\Delta}{dt}=\varepsilon F_2(\tau,x\,y,\Delta,\varepsilon),$$

где $f=\frac{1}{\lambda}f_1$, $F_1=\frac{1}{\lambda}F_1^*$.

Рассмотрим теперь одно линейное уравнение в частотных производных первого порядка с запаздыванием вида

$$\frac{\partial u_1(t,\xi(t),\eta(t))}{\partial t}+A(t,\xi,\eta)\frac{\partial u_1(t,\xi,\eta)}{\partial\xi}+$$

$$+B(t,\xi,\eta)\frac{\partial u_1(t,\xi,\eta)}{\partial\eta}=f(t,\xi,\eta)u_1(t-\theta,\xi(t-\theta),\eta(t-\theta))+F(t), \quad (5)$$

где θ — положительная постоянная.

Характеристической системой, соответствующей уравнению (5), является система

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\xi}{A} = \frac{d\eta}{B} = \frac{du_1}{f(t, \xi, \eta)\, u(t-\theta) + F(t)}\,. \tag{6}$$

Прежде чем построить усредненные уравнения системы (4), необходимо показать, что линейное уравнение в частных производных первого порядка с запаздыванием (5), как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и характеристическая система (6), соответствующая им, эквивалентны. Итак, задачи интегрирования уравнения (5) и системы (6) эквивалентны. В самом деле, с помощью метода шагов легко показать, что при одинаковых начальных условиях решение уравнения (5) есть решение системы (6); наоборот, решение системы (6) также — решение уравнения (5).

Для построения усредненных уравнений при указанных выше предположениях будем отыскивать замену переменных вида

$$\begin{aligned}
x &= \xi + \varepsilon u_1(\tau, \theta, \xi, \xi(t_1)\, \eta, \eta(t_1), t) + \varepsilon^2 u_2(\tau, \theta, \xi, \xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, t) + \ldots, \\
y &= \eta + \varepsilon v_1(\tau, \theta, \xi, \xi(t_1), \eta, \eta(t_1), t) + \varepsilon^2 v_2(\tau, \theta, \xi, \xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, t) + \ldots, \\
\Delta &= \theta + \varepsilon R_1(\tau, \theta, \xi, \xi(t_1)\, \eta, \eta(t_1), t) + \varepsilon^2 R_2(\tau, \theta, \xi, \xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, t) + \ldots,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $t_1 = t - \Delta(t) = t - [\theta + \varepsilon R_1(\tau, \theta, \xi, \xi(t-\theta), \eta, \eta(t-\theta), t) + \ldots]$, $t_2 = t_1 - \Delta(t_1), \ldots$, функции u_i, v_i, R_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ограничены и подлежат определению таким образом, чтобы замена (7) сводила систему (4) к системе усредненных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt} - \lambda\eta = \varepsilon A_1(\tau, \theta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, \theta) + \ldots, \\
&\frac{d\eta}{dt} + \lambda\xi + f(\tau, \xi(t-\theta)) = \varepsilon B_1(\tau, \theta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, \theta) + \ldots, \\
&\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon C_1(\tau, \theta) + \varepsilon^2 C_2(\tau, \theta) + \ldots
\end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ системы (4) и (8) вырождаются в невозмущенную систему (2) и одновременно из замены (7) следует, что $x = \xi = z(\tau, \theta, a, t)$, $y = \eta = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{dz}{dt}$, т. е. решения системы (4) и системы (8) совпадают при одинаковых начальных условиях.

Для решения поставленной задачи необходимо найти функции

$$\begin{aligned}
&u_1, u_2, \ldots;\ v_1, v_2, \ldots;\ R_1, R_2, \ldots;\ A_1(\tau, \theta),\ A_2(\tau, \theta), \ldots; \\
&B_1(\tau, \theta),\ B_2(\tau, \theta), \ldots;\ C_1(\tau, \theta), C_2(\tau, \theta), \ldots.
\end{aligned} \tag{9}$$

Перейдем к их определению. Для этого продифференцируем разложения (7) и подставим найденные выражения в систему (4), выразив при этом все величины через новые переменные ξ, η, θ согласно формулам (7).

В полученных выражениях приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, в результате получим систему соотношений для определения u_1, v_1, R_1:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\lambda(\tau)\eta + \frac{\partial u_1}{\partial \xi(t_1)}\lambda(\tau_1)\eta(t_1)\frac{dt_1}{dt} - \frac{\partial u_1}{\partial \eta}[\lambda(\tau)\xi + f(\tau, \xi(t-\theta))] - \\
&\quad - \frac{\partial u_1}{\partial \eta(t_1)}[\lambda(\tau_1)\xi(t_1) + f(\tau_1, \xi(t_1 - \theta(t_1)))]\frac{dt_1}{dt} = \lambda(\tau)v_1 - A_1(\tau, \theta),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi}\lambda(\tau)\eta + \frac{\partial v_1}{\partial \xi(t_1)}\lambda(\tau_1)\eta(t_1)\frac{dt_1}{dt} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta}[\lambda(\tau)\xi + f(\tau, \xi(t-\theta))] -$$

$$- \frac{\partial v_1}{\partial \eta(t_1)}[\lambda(\tau_1)\xi(t_1) + f(\tau_1, \xi(t_1 - \theta(t_1)))]\frac{dt_1}{dt} = -\lambda(\tau)u_1 -$$

$$- \frac{\partial f(\tau, \xi(t-\theta))}{\partial \xi}u_1(t-\theta) + \frac{\partial f(\tau, \xi(t-\theta))}{\partial \xi} \times$$

$$\times R_1(t)\eta(t-\theta) + F_{10}(\tau, \xi, \eta, \theta) - B_1(\tau, \theta), \tag{10}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + \frac{\partial R_1}{\partial \xi}\lambda(\tau)\eta + \frac{\partial R_1}{\partial \xi(t_1)}\lambda(\tau_1)\eta(t_1)\frac{dt_1}{dt} - \frac{\partial R_1}{\partial \eta}[\lambda(\tau)\xi + f(\tau, \xi(t-\theta))] -$$

$$- \frac{\partial R_1}{\partial \eta(t_1)}[\lambda(\tau_1)\xi(t_1) + f(\tau_1, \xi(t_1 - \theta(t_1)))]\frac{dt_1}{dt} = F_{20}(\tau, \xi, \eta, \theta) - C_1(\tau, \theta),$$

где $\tau_1 = \varepsilon t_1$, $F_{10}(\tau, \xi, \eta, \theta) = F_1|_{\varepsilon=0}$, $F_{20}(\tau, \xi, \eta, \theta) = F_2|_{\varepsilon=0}$.

Прежде чем переходить к исследованию первых двух уравнений системы (10), остановимся на рассмотрении ее последнего уравнения. Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая этому уравнению, имеет вид

$$\frac{d\xi}{\lambda(\tau)\eta} = \frac{d\xi(t_1)}{\lambda(\tau_1)\eta(t_1)\dfrac{dt_1}{dt}} = \frac{d\eta}{\lambda(\tau)\xi + f(\tau, \xi(t-\theta))} =$$

$$= \frac{d\eta(t_1)}{[\lambda(\tau_1)\xi(t_1) + f(\tau_1, \xi(t_1 - \theta(t_1)))]\dfrac{dt_1}{dt}} = \frac{dR_1}{F_{20}(\tau, \xi, \eta, \theta) - C_1(\tau, \theta)} = \frac{dt}{1}, \tag{11}$$

где $\theta = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ (θ входит в эту систему как параметр).

Для системы (11) четыре интеграла известны, так как по предположению известно решение $x = z(t)$ невозмущенного уравнения. Они имеют вид

$$\xi(t) = z(t), \quad \eta(t) = \frac{dz(t)}{dt}, \quad \xi(t_1) = z(t-\theta), \quad \eta(t_1) = \frac{d}{dt}z(t-\theta). \tag{12}$$

Последний интеграл системы (11) можем найти при помощи квадратур:

$$R_1(t) = R_1(0) + \int_0^t \left[F_{20}\left(\tau, z(t), \frac{dz}{dt}, \theta\right) - C_1(\tau, \theta)\right]dt. \tag{13}$$

Функция F_{20} периодическая по t периода $2\pi/\omega$, поэтому для ограниченности функции $R_1(t)$ естественно положить

$$C_1(\tau, \theta) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} F_{20}\left(\tau, z(t), \frac{dz(t)}{dt}, \theta\right)dt. \tag{14}$$

Перейдем к рассмотрению первых двух уравнений системы (10). После ряда выкладок получаем уравнения для определения функций u_1 и v_1

$$\frac{du_1}{dt} - \lambda(\tau) v_1(t) = -A_1(\tau, \theta),$$

$$\frac{dv_1}{dt} + \lambda(\tau) v_1(t) + \frac{\partial f(\tau, z(\tau, \theta, a, t-\theta))}{\partial z} u_1(t-\theta) = Q(\tau, \theta, t) - B_1(\tau, \theta), \tag{15}$$

где $Q(\tau, \theta, t) = \dfrac{\partial f(\tau, \xi(t-\theta))}{\partial \xi} \eta(t-\theta) R_1(t) + F_{10}(\tau, \xi, \eta, \theta)$ и $R_1(t)$ определяется согласно (13), ξ, η — по формулам (12). Поэтому $Q(\tau, \theta, t)$ является известной функцией времени.

Система (15) является системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и с постоянным отклонением аргумента. Для построения решения системы (15) найдем решение $V(t)$ системы соответствующих ей однородных уравнений с начальным условием

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E & \text{при } t = +0, \end{cases} \tag{16}$$

где $V(t)$ — квадратная матрица, 0 — нулевая матрица, E — единичная матрица. Нетрудно видеть, что указанные условия определяют решение $V(t)$, которое можно получить методом шагов для всех $t > 0$. В результате матрица $V(t)$ имеет вид

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos\lambda t + u_{1i-1}(t) & \frac{1}{\lambda}\sin\lambda t + u_{1i-1}(t) \\ -\lambda\sin\lambda t + v_{1i-1}(t) & \cos\lambda t + v_{1i-1}(t) \end{pmatrix}, \tag{17}$$
$$(i-1)\theta \leqslant t \leqslant i\theta, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

где функции $u_{1i}(t)$, $v_{1i}(t)$ определяются по следующим формулам:

$$u_{1i}(t) = \cos\lambda t \left[u_{1i-1}((i-1)\theta) + \int\limits_{(i-1)\theta}^{t} \lambda \frac{\partial f(\tau, z(\tau, \theta, s-\theta))}{\partial z} u_{1i-1}(s-\theta)\, ds \right] +$$
$$+ \frac{\sin\lambda t}{\lambda} \left[v_{1i-1}((i-1)\theta) + \int\limits_{(i-1)\theta}^{t} \frac{\partial f(\tau, z(\tau, \theta, s-\theta))}{\partial z} v_{1i-1}(s-\theta)\, ds \right],$$
$$\tag{18}$$
$$v_{1i}(t) = -\lambda\sin\lambda t \left[u_{1i-1}((i-1)\theta) - \lambda \int\limits_{(i-1)\theta}^{t} \frac{\partial f(\tau, z(\tau, \theta, s-\theta))}{\partial z} u_{1i-1}(s-\theta)\, ds \right] +$$
$$+ \cos\lambda t \left[v_{1i-1}((i-1)\theta) + \int\limits_{(i-1)\theta}^{t} \frac{\partial f(\tau, z(\tau, \theta, s-\theta))}{\partial z} v_{1i-1}(s-\theta)\, ds \right].$$

Для простоты перепишем систему (15) в виде

$$\frac{dX}{dt} = MX + N(t) X(t-\theta) + F(t), \tag{19}$$

где X, $F(t)$ — вектор-столбцы; $F(t) = F_1(t) - L_1(\tau, \theta)$, а $L_1(\tau, \theta) = (A_1(\tau, \theta), B_1(\tau, \theta))'$, $F_1(t) = (0, Q(t))'$; $M(\tau)$, $N(\tau)$ — квадратные матрицы.

Согласно работе [3], решение системы (19) выражается в виде

$$X(t) = V(t)\varphi_1(0) + \int\limits_{t_0}^{t} V(t-s)[F_1(s) - L(\tau, \theta)]\, ds +$$
$$+ \int\limits_{-\theta}^{0} V(t-\theta-s) N(\theta+s) \varphi_1(s)\, ds. \tag{20}$$

Если предположить, что $\varphi_1(t)$ — произвольная функция на начальном промежутке, то формулу (20) можно рассматривать как общее решение уравнения (19).

Функции $A_1(\tau, \theta)$, $B_1(\tau, \theta)$ определяются из условия ограниченности $X(t)$. Легко видеть, что

$$L_1(\tau, \theta) = \overline{\overline{V(t-s)}}^{-1}\ \overline{\overline{V(t-s)F_1(s)}}, \tag{21}$$

где

$$\overline{\overline{V(t-s)}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T V(t-s)\,dsdt, \tag{22}$$

$$\overline{\overline{V(t-s)F_1(s)}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T v(t-s)\,F_1(s)\,dsdt. \tag{23}$$

Если определитель матрицы (22) отличен от нуля, то $A_1(\tau, \theta)$ и $B_1(\tau, \theta)$ определяются единственно и, следовательно, функции $u_1(t)$, $v_1(t)$ определены. Причем A_i, B_i, C_i, u_i, v_i, R_i $(i = 2, 3, \ldots)$ также определяются единственно. В самом деле, u_i, v_i, R_i удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
\frac{du_i}{dt} - \lambda v_i = S_{ui}(t) - A_i(\tau, \theta), \\
\frac{dv_i}{dt} + \lambda u_i + \frac{\partial f(\tau, z(\tau, \theta, t-\theta))}{\partial z}\, u_i(t-\theta) = S_{vi}(t) - B_i(\tau, \theta), \\
\frac{dR_i}{dt} = P_i(t) - C_i(\tau, \theta),
\end{gathered} \tag{24}$$

где $S_{ui}(t)$, $S_{vi}(t)$, $P_i(t)$ — известные функции времени.

Функции $R_i(t)$ и $C_i(\tau, \theta)$, как и раньше, всегда можно определить. Однородные уравнения первых двух уравнений системы (24) совпадают с однородными уравнениями системы (15), поэтому матрица $V(t)$ имеет вид (17). Повторяя процесс предыдущих вычислений, приходим к выводу, что A_i, B_i, C_i, u_i, v_i, R_i определятся единственным образом. Функция $\Delta(t)$, определяемая как решение системы (1), удовлетворяет условию запаздывания, т. е. $\Delta(t)$ является положительной функцией. Справедливость этого утверждения следует из теоремы, приводимой без доказательства.

Теорема. *Предположим, что для системы* (1) *выполняются условия:*

1) *невозмущенное уравнение* (2) *имеет периодическое решение* $z = z(t)$;

2) *среднее значение функции* $F_{20}(\tau, z, z'_t, \theta)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F_{20}(\tau, z, z'_t, \theta)\,dt \geqslant D_1\theta + D_2, \tag{25}$$

где D_1, D_2 — *постоянные и* D_2 — *неотрицательная;*

3) *начальное условие*

$$\Delta(t, \varepsilon)\big|_{\substack{t=0,\\ \varepsilon=0}} \geqslant \rho > 0. \tag{26}$$

Тогда существует такое ε_0, *что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *функция* $\Delta(t)$ *в первом приближении является положительной на интервале* $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$.

В качестве частного случая рассмотрим следующую систему:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x - \gamma x^3(t - \varepsilon\Delta) = 0, \\
\frac{d\Delta}{dt} = \varepsilon\Delta(x - 1).
\end{gathered} \tag{27}$$

При $\varepsilon = 0$ система (27) вырождается в уравнение Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x - \gamma x^3 = 0, \quad \Delta = \text{const}. \tag{28}$$

Приближенное решение уравнения (28) имеет вид:

$$z(a, \psi) = a\cos\psi + \frac{\gamma a^3}{32\lambda}(\cos\psi - \cos 3\psi), \quad \psi = \omega(a)\,t + \varphi,$$

$$\omega(a) = \left(1 + \frac{3\gamma a^2}{8\lambda}\right)^{-1}. \tag{29}$$

Как и раньше, перепишем систему (27) в виде

$$\frac{dx}{dt} - \lambda y = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + \lambda x - \frac{\gamma}{\lambda}x^3 = -\varepsilon 3\gamma\Delta y x^2 + \ldots, \tag{30}$$

$$\frac{d\Delta}{dt} = \varepsilon\Delta(x - 1).$$

Сделав замену (7) в системе (30), в которой функции $u_1(t)$, $v_1(t)$, $R_1(t)$ определяются из уравнений

$$\frac{du_1}{dt} - \lambda v_1 = -A_1(\theta), \ \frac{dv_1}{dt} + \left(\lambda - \frac{3\gamma}{\lambda}z^2(a, \psi)\right)u_1 = 3\gamma\theta\omega z^2 z'_\psi - B_1(\theta),$$

$$R_1 = R_1(0) + \frac{\theta}{\omega}\left[a\sin\psi - \frac{\gamma a^3}{32\lambda}(\sin\psi - 3\sin 3\psi)\right], \tag{31}$$

где θ считается постоянной, получим усредненные уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} - \lambda\eta = \varepsilon A_1(\theta_0 e^{-\varepsilon t}), \quad \frac{d\eta}{dt} + \lambda\xi - \frac{\gamma}{\lambda}\xi^3 = \varepsilon B_1(\theta_0 e^{-\varepsilon t}), \quad \theta = \theta_0 e^{-\varepsilon t}. \tag{32}$$

Для решения поставленной задачи необходимо найти функции $A_1(\theta)$, $B_1(\theta)$. Эти функции определяются из условия существования периодического решения системы (31). Пусть λ — большое такое, что $\left(\lambda - \frac{3\gamma}{\lambda}z^2(a, \psi)\right) > 0$. Тогда фундаментальная система решений однородных уравнений, соответствующих системе (31), может быть найдена приближенно (см. [4]). Для того, чтобы существовало периодическое решение системы (31), ее правые части и фундаментальная система решений сопряженной системы должны быть взаимно ортогональными. Из этого условия получим уравнения для определения функций $A_1(\theta)$, $B_1(\theta)$.

Если ограничиться первым приближением, то получим решение системы (27) вида

$$x = \xi = a\cos\psi + \frac{\gamma a^3}{32\lambda}(\cos\psi - \cos 3\psi),$$

$$y = \eta = -a\omega\sin\psi - \frac{\gamma\omega a^3}{32\lambda}(\sin\psi - 3\sin 3\psi),$$

$$\Delta(t, \varepsilon) = \theta_0 e^{-\varepsilon t}\left\{1 + \varepsilon\frac{R_1(0)}{\theta_0}e^{\varepsilon t} + \frac{\varepsilon}{\omega}\left[a\sin\psi - \frac{\gamma a^3}{32\lambda}\left(\sin\psi - \frac{1}{3}\sin 3\psi\right)\right]\right\},$$

Δ — положительная и ограниченная функция, следовательно, система (27) является системой дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. О применении метода усреднения к некоторым системам дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. — Вестник МГУ. Сер. III. Физика, астрономия, 1968, № 2, с. 129—131.
2. Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. Об асимптотическом решении методом усреднения некоторых систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. — Вестник МГУ. Сер. III. Физика, астрономия, 1968, № 2, с. 109—111.
3. Шиманов С. Н. Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием. — В кн.: Пятая летняя математическая школа (Ужгород, июнь — июль 1967 г.). Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1968, с. 473—549.
4. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969. 377 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
9.II. 1977 г.