УДК 517.9

Нгуен ван Дао

Асимптотический метод исследования многочастотных колебаний в квазилинейных системах интегро-дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим колебания систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями второго порядка типа

$$\sum_{l=1}^{N} a_{lj}\ddot{q}_l + \sum_{l=1}^{N} b_{lj}q_l = \varepsilon Q_j(\theta_1, \ldots, \theta_r, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \lambda_j(t-\tau)\, G_j[q_1(\tau), \ldots, q_N(\tau), \dot{q}_1(\tau), \ldots, \dot{q}_N(\tau), \varepsilon]\, d\tau, \tag{1}$$

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \nu_k = \text{const} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N;\ k = 1, 2, \ldots, r).$$

Допустим, что имеют место разложения

$$Q_j(\theta, q, \dot{q}, \varepsilon) = Q_j^{1}(\theta, q, \dot{q}) + \varepsilon Q_j^{(2)}(\theta, q, \dot{q}) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$G_j(q, \dot{q}, \varepsilon) = G_j^{1}(q, \dot{q}) + \varepsilon G_j^{(2)}(q, \dot{q}) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$Q_j^{(m)} = \sum_c Q_{jc}^{(m)}(q, \dot{q})\, e^{\overset{*}{i}(c_1\theta_1 + \ldots + c_r\theta_r)}, \quad \overset{*}{i}{}^2 = -1,$$

$$q = (q_1, \ldots, q_N), \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N), \quad c = (c_1, \ldots, c_r).$$

Здесь $G_j^{(s)}$, $Q_{jc}^{(m)}(q, \dot{q})$ — полиномы своих аргументов.

В данной статье исследуется резонансный случай, когда между собственными частотами $\omega_1, \ldots, \omega_N$ и частотами внешних возмущений $\nu_1, \ldots, \nu_r$ имеют место n резонансных соотношений вида

$$p_1^{(\alpha)}\Omega_1 + \ldots + p_N^{(\alpha)}\Omega_N + c_1^{(\alpha)}\nu_1 + \ldots + c_r^{(\alpha)}\nu_r \equiv 0, \qquad \Omega_j \sim \omega_j \tag{2}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

где $p_j^{(\alpha)}$, $c_k^{(\alpha)}$ — целые положительные или отрицательные числа, некоторые из них могут быть обращены в нуль, но по крайней мере одно число $p^{(\alpha)}$

отлично от нуля. Числа ω_s являются корнями частотного уравнения $\det \| -a_{ij}\omega^2 + b_{ij} \| = 0$.

Будем искать решение уравнений (1) в форме [1]

$$q_j = \sum_{s=1}^{N} \varphi_j^{(s)} a_s \cos(\xi_s + \psi_s) + \varepsilon u_j^{(1)}(a, \xi + \psi, \theta) + \varepsilon^2 u_j^{(2)} \ldots,$$

$$a = (a_1, \ldots, a_N), \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N), \quad \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N), \quad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r), \tag{3}$$

где величины a_s, ψ_s удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{da_s}{dt} = \varepsilon A_1^{(s)}(a, \psi) + \varepsilon^2 A_2^{(s)}(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots,$$

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \omega_s - \Omega_s + \varepsilon B_1^{(s)}(a, \psi) + \varepsilon^2 B_2^{(s)}(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots,$$

где $\dfrac{d\xi_s}{dt} = \Omega_s$, $p_1^{(\alpha)}\xi_1 + \ldots + p_N^{(\alpha)}\xi_N + c_1^{(\alpha)}\theta_1 + \ldots + c_r^{(\alpha)}\theta_r \equiv 0$ $(s = 1, 2, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, \ldots, n)$.

Найдя производные $\dot{q}$, $\ddot{q}$ и подставляя их в уравнения (1), затем приравнивая коэффициенты одинаковых степеней малого параметра ε, получаем

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{a_{ij}\left[\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\omega_l\omega_s \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial(\xi_s + \psi_s)\partial(\xi_l + \psi_l)} + 2\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\nu_k\omega_l \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial\theta_k \partial(\xi_l + \psi_l)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k,n=1}^{r}\nu_k\nu_n \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial\theta_k\partial\theta_n}\right] + b_{ij}u_i^{(1)}\right\} = -\sum_{i=1}^{N}\left\{a_{ij}\sum_{s=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{N}(\omega_l - \Omega_l)\varphi_i^{(s)}\frac{\partial A_1^{(s)}}{\partial\psi_l} - \right.\right.$$

$$\left. - 2a_s\omega_s\varphi_i^{(s)}B_1^{(s)}\right]\cos(\xi_s + \psi_s) - a_{ij}\sum_{s=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{N}(\omega_l - \Omega_l)\, a_s\varphi_i^{(s)}\frac{\partial B_1^{(s)}}{\partial\psi_l} + \right.$$

$$\left.\left. + 2\omega_s\varphi_i^{(s)}A_1^{(s)}\right]\sin(\xi_s + \psi_s) + R_j^{(1)}\right\}, \tag{4}$$

где

$$R_j^{(1)} = Q_j^{(1)}(\theta, q^0, \dot{q}^0) + \int_0^t \lambda_j(t - \tau)\, G_j^{(1)}[q^0(\tau), \dot{q}_0(\tau)]\, d\tau,$$

$$q_i^0(t) \cong \sum_{s=1}^{N}\varphi_i^{(s)}a_s\cos(\omega_s t + \xi_s^0 + \psi_s^0),$$

$$\dot{q}_s^0(t) \cong -\sum_{s=1}^{N}\varphi_i^{(s)}a_s\omega_s\sin(\omega_s t + \xi_s^0 + \psi_s^0), \quad \psi_s(t) + \xi_s(t) \cong \omega_s t + \xi_s^0 + \psi_s^0,$$

и

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{a_{ij}\left[\sum_{s,l=1}^{N}\omega_s\omega_l \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial(\xi_s + \psi_s)\partial(\xi_l + \psi_l)} + 2\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\nu_k\omega_l \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial\theta_k\partial(\xi_l + \psi_l)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n,k=1}^{r}\nu_n\nu_k \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial\theta_k\partial\theta_n}\right] + b_{ij}u_i^{(1)}\right\} = R_j^{(2)} -$$

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\left\{\sum_{s=1}^{N}\left[-\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)\,\varphi_i^{(s)}a_s\frac{\partial B_2^{(s)}}{\partial\psi_l}+2\omega_s\varphi_i^{(s)}A_2^{(s)}\right]\sin(\xi_s+\psi_s)+\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)\,\varphi_i^{(s)}\frac{\partial A_2^{(s)}}{\partial\psi_l}-2\omega_s a_s\varphi_i^{(s)}B_2^{(s)}\right]\cos(\xi_s+\psi_s)+$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{N}A_1^{(l)}\varphi_i^{(s)}\frac{\partial A_1^{(s)}}{\partial a_l}+\sum_{l=1}^{N}B_1^{(l)}\varphi_i^{(s)}\frac{\partial A_1^{(s)}}{\partial\psi_l}-a_s\varphi_i^{(s)}B_1^{2(s)}\right]\cos(\xi_s+\psi_s)-$$

$$\left.-\sum_{s=1}^{N}\left[2A_1^{(s)}B_1^{(s)}\varphi_i^{(s)}+\sum_{l=1}^{N}a_s\varphi_i^{(s)}A_1^{(l)}\frac{\partial B_1^{(s)}}{\partial a_l}+\sum_{l=1}^{N}a_s\varphi_i^{(s)}B_1^{(l)}\frac{\partial B_1^{(s)}}{\partial\psi_l}\right]\sin(\xi_s+\psi_s)\right\};\tag{5}$$

здесь

$$R_j^{(2)}=Q_j^{(2)0}+\sum_{l=1}^{N}u_l^{(1)}\frac{\partial Q_j^{(1)0}}{\partial q_l^0}+\sum_{l=1}^{N}s_l^{(1)}\frac{\partial Q_j^{(1)0}}{\partial\dot q_l^0}+$$

$$+\int_0^t\lambda_j(t-\tau)\left[G_j^{(2)}(q^0(\tau),\ \dot q^0(\tau))+\sum_{l=1}^{N}u_l^{(1)}\frac{\partial G_j^{(1)0}(\tau)}{\partial q_l^0}+\sum_{l=1}^{N}s_l^{(1)}\frac{\partial G_j^{(1)0}(\tau)}{\partial\dot q_l^0}\right]d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}a_{ij}\left\{2\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\nu_kA_1^{(l)}\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial\theta_k\partial a_l}+2\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\nu_kB_1^{(l)}\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial\theta_k\partial(\xi_l+\psi_l)}+\right.$$

$$+2\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\omega_lB_1^{(s)}\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial(\xi_l+\psi_l)\,\partial(\xi_s+\psi_s)}+2\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\omega_lA_1^{(s)}\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial(\xi_l+\psi_l)\,\partial a_s}+$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(\omega_s-\Omega_s)\frac{\partial B_1^{(l)}}{\partial\psi_s}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial(\xi_l+\psi_l)}+\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(\omega_s-\Omega_s)\frac{\partial A_1^{(l)}}{\partial\psi_s}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial a_l}\right\},$$

где

$$s_l^{(1)}=\sum_{k=1}^{r}\nu_k\frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial\theta_k}+\sum_{s=1}^{N}\varphi_l^{(s)}\left[A_1^{(s)}\cos(\xi_s+\psi_s)-a_sB_1^{(s)}\sin(\xi_s+\psi_s)+\right.$$

$$\left.+\omega_s\frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial(\xi_s+\psi_s)}\right].$$

Умножая обе части уравнения (4) на $\varphi_j^{(v)}$ и суммируя по j от 1 до N, получаем следующие уравнения относительно $A_1^{(s)}$, $B_1^{(s)}$ и $u_i^{(1)}$:

$$\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\varphi_j^{(v)}\left[\sum_{s,l=1}^{N}\omega_s\omega_l\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial(\xi_s+\psi_s)\partial(\xi_l+\psi_l)}+2\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\nu_k\omega_l\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial\theta_k\partial(\xi_l+\psi_l)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n,k=1}^{r}\nu_k\nu_n\frac{\partial^2u_i^{(1)}}{\partial\theta_k\partial\theta_n}+\omega_v^2u_i^{(1)}\right]=M_v\left[\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)\,a_v\frac{\partial B_1^{(v)}}{\partial\psi_l}+2\omega_vA_1^{(v)}\right]\sin(\xi_v+\psi_v)+$$

$$+M_v\left[-\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)\frac{\partial A_1^{(v)}}{\partial\psi_l}+2a_v\omega_v B_1^{(v)}\right]\cos(\xi_v+\psi_v)+\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}Q_j^{(1)0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\int_0^t\lambda_j(t-\tau)\,G_j^{(1)}[q^0(\tau),\dot{q}^0(\tau)]\,d\tau, \qquad (6)$$

где $M_v=\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\varphi_i^{(v)}\varphi_j^{(v)}$.

Полагая

$$\lambda_{jcm}=\lambda_{jcm_1\ldots m_N}=\int_0^\infty\lambda_j(\tau)\cos(m_1\omega_1\tau+\ldots+m_N\omega_N\tau)\,d\tau,$$

$$\lambda_{jsm}=\lambda_{jsm_1\ldots m_N}=\int_0^\infty\lambda_j(\tau)\sin(m_1\omega_1\tau+\ldots+m_N\omega_N\tau)d\tau,$$

$$G_{jm}^{(1)c}=G_{jm_1\ldots m_N}^{(1)c}=\frac{2}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\overline{G}_j^{(1)0}\cos[m_1(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)+\ldots$$

$$\ldots+m_N(\overline{\xi}_N+\overline{\psi}_N)]\,d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d(\overline{\xi}_N+\overline{\psi}_N),$$

$$G_{jm}^{(1)s}=G_{jm_1\ldots m_N}^{(1)s}=\frac{2}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\overline{G}_j^{(1)0}\sin[m_1(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)+\ldots$$

$$\ldots+m_N(\overline{\xi}_N+\overline{\psi}_N)]\,d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d(\overline{\xi}_N+\overline{\psi}_N), \qquad (7)$$

имеем приближенное представление [2]

$$\int_0^t\lambda_j(t-\tau)\,G_j^{(1)}[q^0(\tau),\dot{q}^0(\tau)]\,d\tau\sim\sum_m\{[\lambda_{jcm}G_{jm}^{(1)c}-\lambda_{jsm}G_{jm}^{(1)s}]\cos[m_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots$$

$$\ldots+m_N(\xi_N+\psi_N)]+[\lambda_{jsm}G_{jm}^{(1)c}+\lambda_{jcm}G_{jm}^{(1)s}]\sin[m_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots$$

$$\ldots+m_N(\xi_N+\psi_N)]\}. \qquad (8)$$

Разлагаем функции $Q_j^{(1)0}$ и искомые функции $u_i^{(1)}$ в ряды Фурье

$$Q_j^{(1)0}=\sum_{p,c}Q_{jp_1\ldots p_Nc_1\ldots c_r}^{(1)0}e^{\overset{*}{i}[p_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots+p_N(\xi_N+\psi_N)+c_1\theta_1+\ldots+c_r\theta_r]},$$

где

$$Q_{jpc}^{(1)0}=\frac{1}{(2\pi)^{N+r}}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\overline{Q}_j^{(1)0}\,e^{-\overset{*}{i}[p_1(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)+\ldots+c_r\overline{\theta}_r]}d(\xi_1+\psi_1)\ldots d\theta_r,$$

$$u_i^{(1)}=\sum_{p,c}u_{ipc}^{(1)}e^{\overset{*}{i}[p_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots+p_N(\xi_N+\psi_N)+c_1\theta_1+\ldots+c_r\theta_r]}. \qquad (9)$$

Подставляя выражения (8), (9) в (6), находим

$$\sum_{p,c}\left[\omega_v^2-\left(\sum_{s=1}^{N}p_s\omega_s+\sum_{k=1}^{r}c_k\nu_k\right)^2\right]\left\{\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\varphi_j^{(v)}u_{ipc}^{(1)}e^{\overset{*}{i}[p_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots+c_r\theta_c]}\right\}=$$

$$=M_v\left[\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)\,a_v\frac{\partial B_1^{(v)}}{\partial\psi_l}+2\omega_vA_1^{(v)}\right]\sin(\xi_v+\psi_v)+$$

$$+M_v\left[-\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)\frac{\partial A_1^{(v)}}{\partial\psi_l}+2a_v\omega_v B_1^{(v)}\right]\cos(\xi_v+\psi_v)+ \tag{10}$$

$$+\sum_{p,c}e^{\overset{*}{i}[p_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots+c_r\theta_r]}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}Q_{jpc}^{(1)0}+$$

$$+\sum_{m}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\left[\lambda_{jcm}G_{jm}^{(1)c}-\lambda_{jsm}G_{jm}^{(1)s}\right]\cos\left[m_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots+m_N(\xi_N+\psi_N)\right]+$$

$$+\sum_{m}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\left[\lambda_{jsm}G_{jm}^{(1)c}+\lambda_{jcm}G_{jm}^{(1)s}\right]\sin\left[m_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots+m_N(\xi_N+\psi_N)\right].$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos(\xi_v+\psi_v)$ и $\sin(\xi_v+\psi_v)$ в (10), находим

$$\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)\frac{\partial A_1^{(v)}}{\partial\psi_l}-2a_v\omega_v B_1^{(v)}=\frac{2}{M_v}\sum_{\beta}\frac{e^{\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}\psi^{(\alpha)}}}{(2\pi)^{N+r}}\int_0^{2\pi}\ldots$$

$$\ldots\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{Q}_j^{(1)0}e^{-\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}\overline{\psi}_1^{(\alpha)}}\cos(\overline{\xi}_v+\overline{\psi}_v)\,d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d\overline{\theta}_r+$$

$$+\frac{1}{M_v}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\left[\lambda_{jcv}G_{jv}^{(1)c}-\lambda_{jsv}G_{jv}^{(1)s}\right],$$

$$\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)a_v\frac{\partial B_1^{(v)}}{\partial\psi_l}+2\omega_v A_1^{(v)}=-\frac{1}{M_v}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\left[\lambda_{jsv}G_{jv}^{(1)c}+\lambda_{jcv}G_{jv}^{(1)s}\right]-$$

$$-\frac{2}{M_v}\sum_{\beta}\frac{e^{\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}\psi^{(\alpha)}}}{(2\pi)^{N+r}}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{Q}_j^{(1)0}e^{-\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}\overline{\psi}_1^{(\alpha)}}\sin(\overline{\xi}_v+\overline{\psi}_v)d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d\overline{\theta}_r,$$

где

$$\lambda_{jcv}=\lambda_{jcm_1\ldots m_N}\Big|_{\substack{m_v=1,\\ m_s=0,s\neq v}},\quad \lambda_{jsv}=\lambda_{jsm_1\ldots m_N}\Big|_{\substack{m_v=1,\\ m_s=0,s=v}},$$

$$G_{jv}^{(1)c}=G_{jm_1\ldots m_N}^{(1)c}\Big|_{\substack{m_v=1\\ m_s=0,s\neq v}},\quad G_{jv}^{(1)s}=G_{jm_1\ldots m_N}^{(1)s}\Big|_{\substack{m_v=1,\\ m_s=0,s\neq v}}.$$

Отсюда получим

$$A_1^{(v)}=-\frac{4\omega_v}{M_v}\sum\frac{e^{\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}\psi^{(\alpha)}}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{Q}_i^{(1)0}e^{-\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}\overline{\psi}_1^{(\alpha)}}\sin(\overline{\xi}_v+\overline{\psi}_v)\times d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d\overline{\theta}_r}{(2\pi)^{N+r}\left\{4\omega_v^2-\left[\sum\limits_{s=1}^{N}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}p_s^{(\alpha)}(\omega_s-\Omega_s)\right]^2\right\}}+$$

$$+\frac{2\overset{\bullet}{i}}{M_v}\sum_{\beta}\frac{\sum_{l=1}^{N}\sum_{\alpha_1=1}^{n}(\omega_l-\Omega_l)\,\sigma^{(\beta)}_{\alpha_1 v}p_l^{(\alpha_1)}e^{\overset{\bullet}{i}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}\psi^{(\alpha)}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{Q}_j^{(1)0}e^{-\overset{\bullet}{i}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}\overline{\psi}_1^{(\alpha)}}\times\cos(\overline{\xi}_v+\overline{\psi}_v)\,d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d(\overline{\xi}_N+\overline{\varphi}_N)\,d\overline{\theta}_1\ldots d\overline{\theta}_r}{(2\pi)^{N+r}\left\{4\omega_v^2-\left[\sum_{s=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}p_s^{(\alpha)}(\omega_s-\Omega_s)\right]^2\right\}}-$$

$$-\frac{1}{2\omega_v M_v}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\left[\lambda_{jsv}G_{jv}^{(1)c}+\lambda_{jcv}G_{jv}^{(1)s}\right],$$

$$B_1^{(v)}=-\frac{1}{2a_v\omega_v M_v}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\left(\lambda_{jcv}G_{jv}^{(1)c}-\lambda_{jsv}G_{jv}^{(1)s}\right)-\frac{4\omega_v}{a_v M_v}\times$$

$$\times\sum_{\beta}\frac{e^{\overset{\bullet}{i}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}\psi^{(\alpha)}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{Q}_j^{(1)0}e^{-\overset{\bullet}{i}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}\overline{\psi}_1^{(\alpha)}}\cos(\overline{\xi}_v+\overline{\varphi}_v)d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d\overline{\theta}_r}{(2\pi)^{N+r}\left\{4\omega_v^2-\left[\sum_{s=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}p_s^{(\alpha)}(\omega_s-\Omega_s)\right]^2\right\}}-$$

$$-\frac{2\overset{\bullet}{i}}{a_v M_v}\sum_{\beta}\frac{\sum_{l=1}^{N}\sum_{\alpha_1=1}^{n}(\omega_l-\Omega_l)\sigma^{(\beta)}_{\alpha_1 v}p_l^{(\alpha_1)}e^{\overset{\bullet}{i}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}\psi^{(\alpha)}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{Q}_j^{(1)0}e^{-\overset{\bullet}{i}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}\overline{\psi}^{(\alpha)}}\times\sin(\overline{\xi}_v+\overline{\psi}_v)\,d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d(\overline{\xi}_N+\overline{\psi}_N)\,d\overline{\theta}_1\ldots d\overline{\theta}_r}{(2\pi)^{N+r}\left\{4\omega_v^2-\left[\sum_{s=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{(\beta)}_{\alpha v}p_s^{(\alpha)}(\omega_s-\Omega_s)\right]^2\right\}}.\qquad(11)$$

где $\overset{\bullet}{i}{}^2=-1$.

Приравнивая другие гармоники в (10), получаем выражение для $u_i^{(1)}$. После несложных преобразований имеем

$$u_i^{(1)}=\sum_{p,c}\sum_{v=1}^{N}\varphi_i^{(v)}\frac{e^{\overset{\bullet}{i}[p_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots+p_N(\xi_N+\psi_N)+c_1\theta_1+\ldots+c_r\theta_r]}}{(2\pi)^{N+r}M_v\left[\omega_v^2-\left(\sum_{l=1}^{N}p_l\omega_l+\sum_{k=1}^{r}c_k\nu_k\right)^2\right]}\int_0^{2\pi}\cdots$$

$$\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{Q}_j^{(1)0}e^{-\overset{\bullet}{i}[p_1(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)+\ldots+c_r\overline{\theta}_r]}d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d(\overline{\xi}_N+\overline{\psi}_N)\,d\overline{\theta}_1\ldots d\overline{\theta}_r+$$

$$+\sum_{m}\sum_{j,v=1}^{N}\frac{\varphi_i^{(v)}\varphi_j^{(v)}}{M_v\left[\omega_v^2-\left(\sum_{l=1}^{N}m_l\omega_l\right)^2\right]}\{[\lambda_{jcm}G_{jm}^{(1)c}-\lambda_{jsm}G_{jm}^{(1)s}]\cos[m_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots$$

$$\ldots+m_N(\xi_N+\psi_N)]+[\lambda_{jsm}G_{jm}^{(1)c}+\lambda_{jcm}G_{jm}^{(1)s}]\sin[m_1(\xi_1+\psi_1)+\ldots+m_N(\xi_N+\psi_N)]\},$$

$$(m_v^2-1)^2+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq v}}^{N}m_l^2\neq 0.\qquad(12)$$

Аналогично, после ряда преобразований находим из (5) следующие уравнения для $A_2^{(v)}$, $B_2^{(v)}$:

$$\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)\frac{\partial A_2^{(v)}}{\partial\psi_l}-2\omega_v a_v B_2^{(v)}=a_v B_1^{2(v)}-\sum_{l=1}^{N}A_1^{(l)}\frac{\partial A_1^{(v)}}{\partial a_l}-\sum_{l=1}^{N}B_1^{(l)}\frac{\partial A_1^{(v)}}{\partial\psi_l}+$$

$$+\sum_{\beta}\frac{2e^{\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha_1=1}^{n}\sigma_{\alpha_1 v}^{(\beta)}\psi^{(\alpha_1)}}}{M_v(2\pi)^{N+r}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{R}_j^{(2)0}e^{-\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}\overline{\psi}_1^{(\alpha)}}\cos(\overline{\xi}_v+\overline{\psi}_v)d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d\overline{\theta}_r,$$

$$\sum_{l=1}^{N}(\omega_l-\Omega_l)a_v\frac{\partial B_2^{(v)}}{\partial\psi_l}+2\omega_v A_2^{(v)}=-2A_1^{(v)}B_1^{(v)}-\sum_{l=1}^{N}a_v\frac{\partial B_1^{(v)}}{\partial a_l}A_1^{(l)}-$$

$$-\sum_{l=1}^{N}a_v B_1^{(l)}\frac{\partial B_1^{(v)}}{\partial\psi_l}-\sum_{\beta}\frac{2e^{\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha_1=1}^{n}\sigma_{\alpha_1 v}^{(\beta)}\psi^{(\alpha_1)}}}{M_v(2\pi)^{N+r}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(v)}\overline{R}_j^{(2)0}e^{-\overset{*}{i}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sigma_{\alpha v}^{(\beta)}\overline{\psi}_1^{(\alpha)}}\times$$

$$\times\sin(\overline{\xi}_v+\overline{\psi}_v))\,d(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)\ldots d\overline{\theta}_r, \tag{13}$$

где $\psi^{(\alpha)}=p_1^{(\alpha)}\psi_1+\ldots+p_N^{(\alpha)}\psi_N$, $\overline{\psi}_1^{(\alpha)}=p_1^{(\alpha)}(\overline{\xi}_1+\overline{\psi}_1)+\ldots+p_N^{(\alpha)}(\overline{\xi}_N+\overline{\psi}_N)+$ $+c_1^{(\alpha)}\overline{\theta}_1+\ldots+c_r^{(\alpha)}\overline{\theta}_r$.

Таким образом, в первом приближении примем

$$q_i=\sum_{s=1}^{N}\varphi_i^{(s)}a_s\cos(\xi_s+\psi_s)\quad(i=1,2,\ldots,N)$$

с неизвестными функциями a_s, ψ_s, определяемыми уравнениями

$$\frac{da_s}{dt}=\varepsilon A_1^{(s)}(a,\psi),\qquad\frac{d\psi_s}{dt}=\omega_s-\Omega_s+\varepsilon B_1^{(s)}(a,\psi);$$

здесь $A_1^{(s)}$, $B_1^{(s)}$ задаются формулами (11). Во втором приближении имеем

$$q_i=\sum_{s=1}^{N}\varphi_i^{(s)}a_s\cos(\xi_s+\psi_s)+\varepsilon u_i^{(1)}(a,\xi+\psi,\theta)\quad(i=1,2,\ldots,N).$$

Функции $u_i^{(1)}$ имеют вид (12), а величины a_s, ψ_s являются решениями уравнений второго приближения

$$\frac{da_s}{dt}=\varepsilon A_1^{(s)}(a,\psi)+\varepsilon^2A_2^{(s)}(a,\psi),\quad\frac{d\psi_s}{dt}=\omega_s-\Omega_s+\varepsilon B_1^{(s)}(a,\psi)+\varepsilon^2B_2^{(s)}(a,\psi).$$

Функции $A_1^{(s)}$, $B_1^{(s)}$ имеют вид (11), а функции $A_2^{(s)}$, $B_2^{(s)}$ определяются решением уравнений (13). Вычисление более высоких приближений не представляет трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963. 410 с.
2. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1971. 278 с.

Ханойский
политехнический институт

Поступила в редакцию
20.II.1975 г.