УДК 517.521.8

А. И. Соколенко

К вопросу тауберовых теорем

1. В данной работе, являющейся продолжением статьи [1], изучается вопрос тауберовых теорем* для одного довольно широкого класса T-матриц.

Обозначим через $M^{(p)}$ класс матриц $A = \| a_{nk} \|$. Матрица $A = \| a_{nk} \|$ принадлежит классу $M^{(p)}$, если она является T-матрицей и для нее выполняются следующие условия:

1) существует число $p > 1$ такое, что

$$n^{1-\frac{1}{p}} \| a_n \|_p = O(1), \tag{1}$$

где $\| a_n \|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{n} | a_{nk} |^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ при $1 < p < \infty$, $\| a_n \|_\infty = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n} | a_{nk} |$;

2) справедливо равенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(| a_{nk} | \sum_{\nu=n+1}^{k} \frac{1}{\nu} \right) = O(1). \tag{2}$$

Классу матриц $M^{(p)}$ принадлежат, например, все нижние треугольные T-матрицы $A = \| a_{nk} \|$, удовлетворяющие условию (1) и, в частности, матрицы Чезаро произвольного порядка $\alpha > 0$, некоторый подкласс матриц Хаусдорфа и другие [2, гл. XI]. Возникает вопрос: не являются ли все матрицы класса $M^{(p)}$, которые сильнее чем сходимость, нижними треугольными?**

Предложение. *Существуют матрицы класса $M^{(p)}$, которые сильнее чем сходимость и не являются нижними треугольными.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A = \| a_{nk} \|$, определяемую равенствами

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } n+1 \leqslant k \leqslant 2n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Эта матрица, не являясь нижней треугольной, принадлежит классу матриц $M^{(p)}$. Действительно, рассматриваемая матрица $A = \| a_{nk} \|$ является T-матрицей, для которой $n a_{nk} = 0$, если $1 \leqslant k \leqslant n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(| a_{nk} | \sum_{\nu=n+1}^{k} \frac{1}{\nu} \right) = \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) < \frac{1}{n} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \frac{2}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n} \frac{n}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{(n+1)n}{2} = O(1).$$

---

* По вопросу определений и обозначений, принятых в данной работе, см. работу [1].

** При рассмотрении тауберовых теорем интерес представляют только матрицы, которые сильнее чем сходимость.

Матрица $A = \| a_{nk} \|$ суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $S_n = (-1)^n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В самом деле, имеем

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2p, \\ \dfrac{2p+2}{2p+1}, & \text{если } n = 2p+1 \end{cases} \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$. Предложение доказано.

2. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть даны ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $A = \| a_{nk} \|$ — *матрица класса* $M^{(p)}$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S(A)$, *то равенство*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = o(1) \tag{3}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Теорема 2. *Пусть даны ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $A = \| a_{nk} \|$ — *матрица класса* $M^{(p)}$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S(A)$ и $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. *Если* $S_n = O(1)$ (A) *и* $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, *то* $S_n = O(1)$, *где* $\{S_n\}$ — *последовательность частных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 3. *Пусть даны ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $A = \| a_{nk} \|$ — *матрица класса* $M^{(p)}$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S(A)$, $a_n = 0$ *для* $n \neq n_k$, $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и* $a_{n_k} = o(1)$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Теорема 4. *Пусть даны ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $A = \| a_{nk} \|$ — *матрица класса* $M^{(p)}$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S(A)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} |a_n|^{\alpha} < \infty$ *для какого-нибудь* $\alpha > 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

3. Доказательство теорем 1—4. Для сокращения объема последующих рассуждений сделаем несколько предварительных замеча-

ий. Прежде всего, в силу теоремы Мейер-Кёнига — Тийца [3], — если ля T-матрицы условие $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ является тауберовым, то для этой атрицы тауберовым будет и условие (3) — достаточная часть утвержде-ия теоремы 1 вытекает из первой части утверждения теоремы 2. Далее в еореме 1 доказательства требует только достаточная часть утверждения, оскольку всегда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует равенство (3) [2, с. 192]. Наконец, доказательство второй части утверждения теоремы 2 аналогично оказательству первой части ее утверждения, а доказательство теорем 3 и 4, снованное на использовании теоремы 1, аналогично доказательству те-рем 2 и 3 работы [1], и поэтому мы их опустим. Таким образом, докажем олько первую часть утверждения теоремы 2.

Пусть даны ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $A = \| a_{nk} \|$ — матрица класса $M^{(p)}$, $p > 1$, и пусть

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(A). \tag{5}$$

Без ограничения общности можем считать, что $A = \| a_{nk} \|$ — матрица класса $M^{(p)}$, $1 < p < \infty$, так как если эта матрица принадлежит классу $M^{(\infty)}$, то она принадлежит любому классу $M^{(p)}$, $1 < p < \infty$. Не умаляя общности, можем также считать, что рассматриваемая матрица удовлетворяет условию (см. [1])

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Обозначим через $\{S_n\}$ последовательность частных сумм данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В силу условия (6) получаем равенства

$$\begin{gathered} S_n - t_n = S_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k = \\ = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} (S_n - S_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{nk} (S_n - S_k) = \Sigma_1(n) + \Sigma_2(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{7}$$

Оценим $\Sigma_1(n)$. Запишем

$$\begin{gathered} \Sigma_1(n) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} (S_n - S_k) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{k=1}^{n} a_{nk} - \sum_{k=1}^{n} \left(a_{nk} \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \right) = \\ = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \right) - \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu \sum_{k=\nu}^{n} a_{nk} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} a_{nk} \right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{gathered}$$

Так как по неравенству Гельдера, в силу условия (1), справедливы неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{\nu-1} a_{nk} \right| \leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} | a_{nk} |^p \right\}^{\frac{1}{p}} \nu^{1-\frac{1}{p}} < K \left(\frac{\nu}{n} \right)^{1-\frac{1}{p}}, \quad K < \infty,$$

где K не зависит от n, $n = 1, 2, \ldots$, а, в силу условия (4), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\nu |a_\nu| < \frac{\varepsilon (p-1)}{2Kp} \quad (\nu > \nu_0),$$

и поэтому справедливы неравенства

$$\frac{K}{n^{1-\frac{1}{p}}} \sum_{\nu=\nu_0+1}^{n} \nu^{1-\frac{1}{p}} |a_\nu| < \frac{\varepsilon(p-1)}{2p} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} \sum_{\nu=\nu_0+1}^{n} \nu^{-\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geqslant \nu_0 + 1),$$

то для $\Sigma_1(n)$ при любом $n \geqslant N_1$ получаем оценки

$$|\Sigma_1(n)| = \left| \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} a_{nk} \right) \right| \leqslant \frac{K}{n^{1-\frac{1}{p}}} \left(\sum_{\nu=1}^{\nu_0} \nu^{1-\frac{1}{p}} |a_\nu| + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{n} \nu^{1-\frac{1}{p}} |a_\nu| \right) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{8}$$

Оценим теперь $\Sigma_2(n)$. Так как, в силу условия (4), имеем $a_n = \varepsilon_n / n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то справедливы неравенства

$$|S_n - S_k| = \left| \sum_{\nu=n+1}^{k} a_\nu \right| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{k} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \leqslant \max_{n<\nu<\infty} |\varepsilon_\nu| \sum_{\nu=n+1}^{k} \frac{1}{\nu} \qquad (k \geqslant n+1),$$

поэтому, в силу условия (2), для $\Sigma_2(n)$ при любом $n \geqslant N_2$ получаем оценки

$$|\Sigma_2(n)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{nk} (S_n - S_k) \right| \leqslant \max_{n<\nu<\infty} \varepsilon_\nu \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(|a_{nk}| \sum_{\nu=n+1}^{k} \frac{1}{\nu} \right) < \varepsilon \tag{9}$$

(здесь использовано то, что $\max\limits_{n<\nu<\infty} \varepsilon_\nu \equiv \omega_\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$).

Если выполнено условие (5), т. е.

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k = S,$$

и имеет место равенство (4), то справедливость равенства $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ следует из равенств (7) и неравенств (8) и (9). Первая часть утверждения теоремы 2 доказана.

Замечание. *Теорема 2 является точной в следующем смысле: тауберово условие* $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *в этой теореме нельзя заменить условием* $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Условие $a_{n_k} = o(1)$ *в теореме 3 является существенным.*

Доказательство этого замечания содержится в работе [1].

Автор глубоко признателен Н. А. Давыдову за руководство работой и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколенко А. И. О тауберовых теоремах для одного класса регулярных матриц. — УМЖ, 1974, **26**, № 6, с. 832—836.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
3. Meyer-König W., Tietz H. On tauberian conditions of type *o*. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**, N 6, p. 926—927.

Черниговский
педагогический институт

Поступила в редакцию 18.XI.1975 г.,
после переработки — 20.XII.1976 г.