УДК 519.46

В. С. Чарин

Об одном классе топологических FC-групп

Ю. Г. Федоров [1] доказал, что если в бесконечной дискретной группе всякая нетривиальная, т. е. отличная от единичной, подгруппа имеет конечный индекс, то эта группа — циклическая.

Естественно в связи с этим поставить вопрос: что можно сказать о топологических группах, обладающих аналогичным свойством? Точнее: каковы свойства и строение топологических, все нетривиальные замкнутые подгруппы которых имеют конечные или даже компактные фактор-пространства?

Оказывается, что, накладывая на топологические группы такого рода ограничение, можно получить содержательные результаты, близкие к теореме Ю. Г. Федорова и охватывающие ее.

Рассматриваемые группы входят в класс топологических FC-групп по определению В. И. Ушакова [2]:

элемент g топологической группы G называется FC-элементом, если класс всех сопряженных с g элементов компактен. Топологическая группа G называется FC-группой, если каждый ее элемент является FC-элементом.

Ниже используем следующие обозначения: если M — подмножество группы G, то через $\overline{M}$ обозначаем замыкание его в G; через $\{M\}$ — подгруппу, алгебраически порожденную этим множеством.

Теорема 1. *Бесконечная топологическая группа (с хаусдорфовой топологией), каждая нетривиальная замкнутая подгруппа которой имеет конечный индекс, абелева.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Отметим прежде всего, что всякая замкнутая подгруппа ее обладает тем же определяющим свойством, что и сама группа G: все ее нетривиальные подгруппы имеют конечный индекс.

Так как по условию группа G бесконечна, то она не может иметь элементов конечного порядка, отличных от единичного элемента. Если $f \in G$ и $f \neq 1$, то замыкание $\overline{\{f\}}$ циклической подгруппы $\{f\}$ имеет в G конечный индекс. Отсюда вытекает существование конечной совокупности $f_1, f_2, \ldots, f_n$ элементов таких, что они порождают в топологическом смысле группу G, т. е. $G = \overline{\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}}$. Индекс каждой подгруппы $\overline{\{f_i\}}$, $i=1, 2, \ldots, n$, в G конечен. Централизатор $C(f_i)$ элемента f_i замкнут в G и содержит подгруппу $\overline{\{f_i\}}$. Поэтому пересечение $C = \bigcap_{i=1}^{n} C(f_i)$ — замкнутая подгруппа конечного индекса. Более того, C — подгруппа, принадлежащая центру G, так как все ее элементы перестановочны с образующими элементами ее (точнее: C совпадает с центром группы G, что для наших целей не важно).

Итак, в группе G содержится замкнутая центральная подгруппа C конечного индекса.

Доказательство утверждения теоремы будем вести индукцией по индексу $m = (G : C)$.

Если $m = 1$, то $G = C$, т. е. группа G абелева.

Пусть утверждение теоремы верно для всех групп со свойствами, данными в условии теоремы и обладающими центральными подгруппами, индексы которых меньше m и $m > 1$.

Пусть теперь группа G обладает центральной подгруппой C индекса m.

Выберем в фактор-группе $\widetilde{G} = G/C$ произвольную собственную подгруппу $\widetilde{H}$, возможно даже единичную. Обозначим через H полный прообраз $\widetilde{H}$ в G. Тогда H — замкнутая подгруппа и $\widetilde{H} \cong H/C$. Подгруппа H обладает центральной подгруппой C индекса $(H : C) < m$. По предположению индукции группа H абелева. Поэтому и группа $\widetilde{H}$ абелева. Таким образом оказывается, что все собственные подгруппы конечной группы $\widetilde{G}$ абелевы. Ввиду известной теоремы Миллера—Морено она разрешима. Значит, она обладает инвариантной подгруппой $\widetilde{H}$ простого индекса. Снова обозначим через H такую замкнутую подгруппу из G, что $\widetilde{H} \cong H/C$. К ней применимо предположение индукции, а потому она абелева и без элементов конечного порядка. Фактор-группа G/H по ней — циклическая группа.

В абелевой группе H выберем представители $g_1, g_2, \ldots, g_t$ классов по подгруппе C так, чтобы $H = \{g_1, g_2, \ldots, g_t, C\}$, т. е. чтобы H алгебраически порождалась с помощью $g_1, g_2, \ldots, g_t, C$. Образующий элемент $\widetilde{g}$ фактор-группы G/H индуцирует в абелевой группе H автоморфизм γ:

$$\gamma(x) = g^{-1}xg,$$

где g — некоторый представитель класса $\widetilde{g}$, x пробегает H. При этом $\gamma(a) = a$ для всех $a \in C$, так как подгруппа C лежит в центре группы G.

Пусть $a_i = \gamma(g_i)\, g_k^{-1}$, где $k = k(i)$ — такой номер, зависящий от i, что элемент $\gamma(g_i)$ входит в класс g_kC $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Все элементы a_i входят в подгруппу C. Порождаем алгебраическую подгруппу

$$M = \{g_1, g_2, \ldots, g_t, a_1, a_2, \ldots, a_t\}.$$

По построению $\gamma(M) \subseteq M$. Легко показать также, что $M \subseteq \gamma(M)$. Значит автоморфизм γ индуцирует на подгруппе M автоморфизм в алгебраическом смысле, который также обозначим через γ.

Подгруппа M — свободная абелева группа конечного ранга. Подгруппа $M' = M \cap C$ имеет в M конечный индекс, так как $MC/C \cong M/M'$ и MC/C — конечная группа. Автоморфизм γ на M представляется как линейное преобразование с целочисленной матрицей относительно любого базиса в M. Если $x \in M$, то для некоторого натурального числа $q > 0$ элемент qx принадлежит M', а поэтому $\gamma(qx) = qx$. Ввиду линейности γ отсюда следует $\gamma(x) = x$. В частности, $\gamma(g_i) = g_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$.

Пусть теперь $x \in H$. Тогда $x = g_1^{\alpha_1} \ldots g_t^{\alpha_t} a$, где $a \in C$. Поэтому $\gamma(x) = x$, т. е. $g^{-1}xg = x$ или $gx = xg$ для всех $x \in H$. Значит подгруппа H лежит в центре группы G и последняя группа абелева. Теорема доказана.

Приведем некоторые примеры недискретных абелевых групп, нетривиальные замкнутые подгруппы которых имеют в них конечные индексы. Они показывают, что строение их, вообще говоря, может быть достаточно сложным.

Пример 1. Пусть J_p — аддитивная группа целых p-адитических чисел (p — простое число). Как хорошо известно, все ее нетривиальные замкнутые подгруппы составляют убывающую последовательность $J_p = A_0 \supset \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \ldots$ с факторами J_p/A_n порядка p^n и пересечение их $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ состоит из одного единичного элемента.

Пример 2. Пусть G — произвольная подгруппа — не обязательно замкнутая — группы J_p с индуцированной топологией. В абстрактном смысле она — абелева группа без кручения и ее можно выбрать так, что ранг этой абстрактной группы может оказаться равным любому натуральному числу или даже бесконечным — счетным или несчетным. В случае, когда ранг ее конечен или счетен, топология группы G не может быть локально компактной.

Если H — произвольная замкнутая подгруппа из G, не совпадающая с единичной, то ее индекс конечен.

В самом деле, в J_p найдется такое замкнутое подмножество F, что $H = G \cap F$. Если $\overline{H}$ — замыкание H в J_p, то $\overline{H} \subseteq F$ и, следовательно, $H = G \cap \overline{H}$. При этом $\overline{H}$ — замкнутая подгруппа в группе J_p, а поэтому $\overline{H}$ совпадает с некоторой из подгрупп A_n. Ввиду изоморфизма $GA_n/A_n \cong G/G \cap \cap A_n = G/H$ заключаем, что индекс H конечен, так как $(GA_n : A_n) \leqslant p^n$.

Пример 3. Пусть Z_p — аддитивная группа целых чисел в p-адической топологии. Ее единственными нетривиальными замкнутыми подгруппами являются подгруппы $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$. Здесь B_n — множество всех целых чисел, кратных p^n для любого натурального числа n. Все они имеют в Z_p конечный индекс.

Группа Z_p — частный случай примера 2.

Наложение условия локальной компактности на топологию группы сильно ограничивает класс рассматриваемых групп, как показывает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная группа и все ее замкнутые нетривиальные подгруппы имеют конечные индексы.*

Тогда она принадлежит к одной из групп следующих трех типов:

C. *Бесконечная дискретная циклическая группа.*

$\mathrm{J_p}$. *Аддитивная группа кольца целых p-адических чисел (p — простое число).*

F. *Конечная группа.*

Наоборот, группы всех трех типов C, $\mathrm{J_p}$, F *обладают указанными в теореме свойствами.*

Доказательство. Допустим, что группа G удовлетворяет условиям теоремы и бесконечна. Тогда ввиду предыдущей теоремы она абелева и без элементов конечного порядка.

Если $f \in G$ и $f \neq 1$, то подгруппа $\overline{\{f\}}$ с одним топологически образующим элементом является либо дискретной бесконечной циклической группой, либо группой компактной (см. [3, с. 111]). Поэтому будем различать две возможности: I. Подгруппа $\overline{\{f\}}$ при любом выборе образующего элемента f является бесконечной дискретной циклической подгруппой. II. Хотя бы для одного элемента f она компактна.

В первом случае из структурной теоремы Понтрягина о локально компактных абелевых группах (см. [3, с. 125]) следует, что наша группа G разлагается в прямое произведение $V \times W$ векторной группы V и дискретной группы W без кручения. Но векторная группа $V \neq 1$ не удовлетворяет условию теоремы. Поэтому $G = W$ — дискретная группа без кручения. Легко видеть, что это возможно только в одном случае: G — дискретная бесконечная циклическая группа.

Во втором случае группа G компактна. Группа $G^\wedge$ ее характеров дискретна. Так как любая собственная подгруппа группы $G^\wedge$ является аннулятором некоторой нетривиальной подгруппы из G, то все они конечны.

Из абстрактной теории групп известно, что бесконечные абелевы группы, все собственные подгруппы которых конечны, исчерпываются группами типа p^{∞}, где p—любое простое число. Итак, группа $G^{\wedge}$—дискретная группа типа p^{∞}. Двойственная ей группа G изоморфна аддитивной группе J_p кольца целых p-адических чисел.

Обратное утверждение теоремы очевидно.

Теорема 3. *Пусть G — локально компактная группа и каждая ее нетривиальная замкнутая подгруппа определяет компактное фактор-пространство.*

Тогда группа G принадлежит к одной из групп следующих трех типов:

1. *Одномерная векторная группа.*
2. *Дискретная бесконечная циклическая группа.*
3. *Компактная группа.*

Верно и наоборот: каждая группа типов 1—3 обладает указанными в условии теоремы свойствами.

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Выберем из нее произвольный элемент f, отличный от 1. Класс $\langle f \rangle$ сопряженных с ним элементов является непрерывным образом фактор-пространства G/F, где $F = \overline{\{f\}}$. По условию пространство G/F компактно. Поэтому и класс $\langle f \rangle$ компактен. Значит, группа G является FC-группой в смысле В. И. Ушакова.

Точно так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем рассматривать две возможности: I. Подгруппа $\overline{\{f\}}$ при любом выборе образующего элемента $f \neq 1$ является бесконечной дискретной циклической подгруппой. II. Хотя бы для одного элемента $f \neq 1$ подгруппа $\overline{\{f\}}$ компактна.

В первом случае из основной структурной теоремы Ушакова о топологических FC-группах (см. [4, теорема 6]) вытекает, что G — абелева группа с тривиальной периодической частью. Поэтому она разлагается в прямое произведение $V \times W$ векторной группы V и дискретной группы W без кручения.

Из условия теоремы следует, что либо $G = V$ и тогда G непременно является одномерной векторной группой, либо $G = W$ и тогда G является бесконечной дискретной циклической группой.

Во втором случае группа G компактна.

Обратное заключение теоремы очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ю. Г. О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс. — УМН, 1951, **6**, № 1, с. 187—189.
2. Ушаков В. И. Классы сопряженных элементов в топологических группах. — УМЖ, 1962, **14**, № 4, с. 366—371.
3. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применение. М., Изд-во иностр. лит., 1950. 220 с.
4. Ушаков В. И. Топологические FC-группы. — Сиб. мат. журн., 1963, **4**, № 5, с. 1162—1174.
5. Курош А. Г. Теория групп. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1953. 467 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
13.I. 1976 г.