УДК 517.9

М. Ат. Аролска, Д. Д. Байнов

Двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенной линейной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ линейную систему

$$\begin{aligned} y' &= A(t)\,y + B(t)\,z, \\ \varepsilon z' &= C(t)\,y + D(t)\,z \end{aligned} \tag{1}$$

с краевым условием

$$\begin{aligned} L_1[y(0, \varepsilon), x(1, \varepsilon), \varepsilon] &= 0, \\ L_2[z(0, \varepsilon), z(1, \varepsilon), \varepsilon] &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $y, L_1 \in R_m$, $z, L_2 \in R_n$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Докажем, что при определенных условиях краевая задача (1), (2) имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t), \tag{3}$$

где $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ — решение краевой задачи:

$$\begin{aligned} \bar{y}'(t) &= A(t)\,\bar{y} + B(t)\,\bar{z}, \\ 0 &= C(t)\,\bar{y} + D(t)\,\bar{z}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$L_1[\bar{y}(0), \bar{y}(1), 0] = 0. \tag{5}$$

Отметим, что аналогичная задача, но с линейным краевым условием, была рассмотрена в [1].

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$ непрерывны и $D(t)$ имеет собственные значения с отличными от нуля действительными частями при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

II. Вектор-функции L_1 и L_2 непрерывны и непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

Делая в (1) замену переменных

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & -\varepsilon T \\ -T & I_n + \varepsilon TS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = H(t, \varepsilon) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \tag{6}$$

получим систему

$$\begin{aligned} v' &= [A(t) - B(t)\,T(t, \varepsilon)]\,v, \\ \varepsilon w' &= [D(t) + \varepsilon T(t, \varepsilon)\,B(t)]\,w, \end{aligned} \tag{7}$$

где $T(t, \varepsilon)$, $S(t, \varepsilon)$ — решение системы

$$\begin{aligned} \varepsilon T' &= D(t)\,T - \varepsilon T A(t) + \varepsilon T B(t)\,T - C(t), \\ \varepsilon S' &= \varepsilon[A(t) - B(t)\,T]\,S - S[D(t) - \varepsilon T B(t)] - B(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 (см. [1]). *Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что решение $T(t, \varepsilon)$, $S(t, \varepsilon)$ системы (8) существует на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$, равномерно ограничено при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и имеет место предельный переход*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T(t, \varepsilon) = D^{-1}(t)\,C(t), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} S(t, \varepsilon) = -B(t)\,D^{-1}(t).$$

Отметим, что из условий I, II следует, что $D^{-1}(t)$ существует на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$.

После замены переменных (6) краевые условия (2) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&L_1\left[\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H(0, \varepsilon)\begin{pmatrix} v(0, \varepsilon) \\ w(0, \varepsilon) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H(1, \varepsilon)\begin{pmatrix} v(1, \varepsilon) \\ w(1, \varepsilon) \end{pmatrix}, \varepsilon\right] = 0, \\
&L_2\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} H(0, \varepsilon)\begin{pmatrix} v(0, \varepsilon) \\ w(0, \varepsilon) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} H(1, \varepsilon)\begin{pmatrix} v(1, \varepsilon) \\ w(1, \varepsilon) \end{pmatrix}, \varepsilon\right] = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Введем обозначение

$$
P = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

где p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ — числа собственных значений матрицы $D(t)$, имеющие отрицательные действительные части.

Решение задачи (7), (8) будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
v(t, \varepsilon) &= V(t, \varepsilon)\,\alpha_1(\varepsilon), \\
w(t, \varepsilon) &= [W(t, \varepsilon) P W^{-1}(0, \varepsilon) + W(t, \varepsilon)(I_n - P) W^{-1}(1, \varepsilon)]\,\alpha_2(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $V(t, \varepsilon)$, $W(t, \varepsilon)$ — фундаментальные матрицы систем

$$
V' = (A - BT) V, \tag{11}
$$

$$
\varepsilon W' = (D - \varepsilon T B) W. \tag{12}
$$

Имеет место следующая лемма.

Л е м м а 2. *Существуют независящие от* ε *постоянные* k, μ *и* σ *и постоянная* $\varepsilon_0 > 0$ *такие, что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *справедливы неравенства*

$$
\| W(t, \varepsilon) P W^{-1}(s, \varepsilon) \| \leqslant K e^{-\frac{\mu(t-s)}{\varepsilon}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,
$$

$$
\| W(t, \varepsilon)(I_n - P) W^{-1}(s, \varepsilon) \| \leqslant K e^{-\frac{\mu(s-t)}{\varepsilon}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,
$$

$$
\| V(t, \varepsilon) V^{-1}(s, \varepsilon) \| \leqslant e^{\sigma|t-s|}, \quad 0 \leqslant s, t \leqslant 1.
$$

Подставляя (10) в краевые условия (9), получаем

$$
\begin{aligned}
&L_1\left[\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H(0, \varepsilon)\,\Delta(0, \varepsilon)\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) \\ \alpha_2(\varepsilon) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H(1, \varepsilon)\,\Delta(1, \varepsilon)\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) \\ \alpha_2(\varepsilon) \end{pmatrix}, \varepsilon\right] = 0, \\
&L_2\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} H(0, \varepsilon)\,\Delta(0, \varepsilon)\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) \\ \alpha_2(\varepsilon) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} H(1, \varepsilon)\,\Delta(1, \varepsilon)\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) \\ \alpha_2(\varepsilon) \end{pmatrix}, \varepsilon\right] = 0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

где

$$
\Delta(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} V(t, \varepsilon) & 0 \\ 0 & W(t, \varepsilon) P W^{-1}(0, \varepsilon) + W(t, \varepsilon)(I_n - P) W^{-1}(1, \varepsilon) \end{pmatrix}.
$$

Предположим, что выполнено следующее условие.

III. При $\varepsilon = 0$ система (13) разрешима относительно α_1, α_2 и определитель

$$
\Delta_0^0 = \frac{D(L_1, L_2)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}\Bigg|_{\substack{\alpha_1 = \alpha_1^0 \\ \alpha_2 = \alpha_2^0 \\ \varepsilon = 0}} \neq 0,
$$

где α_1^0, α_2^0 — решение системы (13) при $\varepsilon = 0$.

Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ существуют функции $\alpha_1^0(\varepsilon)$ и $\alpha_2^0(\varepsilon)$, удовлетворяющие системе (13), и краевая задача (7), (9) имеет решение

$$v(t, \varepsilon) = V(t, \varepsilon)\, \alpha_1^0(\varepsilon),$$

$$w(t, \varepsilon) = [W(t, \varepsilon)\, PW^{-1}(0, \varepsilon) + W(t, \varepsilon)(I_n - P)\, W^{-1}(1, \varepsilon)]\, \alpha_2^0(\varepsilon). \quad (14)$$

Отметим, что из леммы 2 следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v(t, \varepsilon) = V(t)\, \alpha_1^0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} w(t, \varepsilon) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (15)$$

где $V(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} V(t, \varepsilon)$.

Введем обозначение

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} \begin{pmatrix} v(t, \varepsilon) \\ w(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t)\, \alpha_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 1.$$

Легко видеть, что $x(t)$ удовлетворяет вырожденной системе, получающейся из (7) при $\varepsilon = 0$:

$$x_1' = [A(t) - B(t)\, D^{-1}(t)\, C(t)]\, x_1, \quad (16)$$

$$0 = D_2(t)\, x_2$$

и краевому условию

$$L_1\left[\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H(0, 0)\, x(0), \ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H(1, 0)\, x(1), \ 0\right] = L_1(\bar{y}(0), \bar{y}(1), 0) = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия* I, II *и* III.

Тогда существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ *такая, что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *решение краевой задачи* (1), (2) *существует на сегменте* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *представимо в виде*

$$\begin{pmatrix} y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & -\varepsilon S(t, \varepsilon) \\ -T(t, \varepsilon) & I_n + \varepsilon T(t, \varepsilon)\, S(t, \varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t, \varepsilon) \\ w(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

где матрица $\begin{pmatrix} v(t, \varepsilon) \\ w(t, \varepsilon) \end{pmatrix}$ *выражается через* (14), *и для* $0 < t < 1$ *имеет место предельный переход*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \begin{pmatrix} y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix},$$

где $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ — *решение краевой задачи* (4), (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chang K. W. Singular perturbations of a general boundary value problem.— Siam. J. Math. Anal., 1972, 3, № 3.

Болгария,
Пловдивский университет

Поступила в редакцию
1.VII 1975 г.