УДК 519.46

А. А. Березовский, Т. М. Нетесова

Инвариантные решения одного квазилинейного уравнения

Решение многих задач математической физики приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными, для которых не существует единого аналитического метода решения. Поэтому привлекают внимание различные специальные методы получения точных частных решений. Одним из них является метод, основанный на использовании теоретико-групповых свойств дифференциальных уравнений [1, 2].

В данной работе этот метод применяется к уравнению

$$u_{tt} = [f(u_x)\,u_x]_x \quad \text{или} \quad u_{tt} = F(u_x)\,u_{xx}, \tag{1}$$

возникающему, например, при описании одномерных течений жидкости и газа ($F(u_x)$ — акустический импеданс), продольных колебаний упругих стержней ($f(u_x) = Eu_x + \lambda u_x^3$), больших колебаний струны $f(u_x) = \lambda_0/\sqrt{1+u_x^2}$, а также волн в упругой среде с плотностью ρ, зависящей от градиента смещения $f(u_x) = \rho(u_x)$. В работе [3] получена алгебра Ли преобразований, допускаемых уравнением (1), базис инфинитезимальных операторов которой состоит из операторов:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2}$$

Там же получено условие существования более широких групп преобразований, допускаемых уравнением (1), а именно:

$$zf''(z) + 2f(z) = \varphi(z)\,[zf'(z) + f(z)], \tag{3}$$

где $\varphi(z)$ — некоторая функция.

Отыскание некоторых точных частных решений уравнения (1), так называемых, инвариантных H-решений ранга $\rho = 1$, приводит к интегрированию нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (S/H-уравнений). Ниже ограничимся отысканием таких решений в случае $f(z) = e^z/z$. При этом условие (3) выполняется для $\varphi(z) \equiv 1$, а уравнение (1) принимает вид:

$$u_{tt} = \exp(u_x)\,u_{xx}. \tag{4}$$

Это уравнение допускает более широкую группу преобразований, алгебра Ли которой состоит из операторов (2) и операторов

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + (u + 2x)\frac{\partial}{\partial u}; \quad X_6 = t\frac{\partial}{\partial t} - 2x\frac{\partial}{\partial u}. \tag{5}$$

Задача отыскания всех существенно различных решений ранга $\rho = 1$ уравнения (4) сводится к построению оптимальной системы однопараметрических подгрупп группы G_7^3 (2), (5). Для этого составим таблицу коммутаторов

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	0	0	X_1+2X_3	$-2X_3$
X_2	0	0	0	X_3	0	X_2
X_3	0	0	0	0	X_3	0
X_4	0	$-X_3$	0	0	X_4	$-X_4$
X_5	$-X_1-2X_3$	0	$-X_3$	$-X_4$	0	0
X_6	$2X_3$	$-X_2$		X_4	0	0

с помощью которой выписываются базисные операторы присоединенной группы алгебры Ли [1]:

$$E_1: (X_1+2X_3)\frac{\partial}{\partial X_5}-2X_3\frac{\partial}{\partial X_6}+X_1\frac{\partial}{\partial X_7},$$

$$E_2: X_3\frac{\partial}{\partial X_4}+X_2\frac{\partial}{\partial X_6}+X_2\frac{\partial}{\partial X_7},\qquad E_3: X_3\frac{\partial}{\partial X_5}+X_3\frac{\partial}{\partial X_7},$$

$$E_4: -X_3\frac{\partial}{\partial X_2}+X_4\frac{\partial}{\partial X_5}-X_4\frac{\partial}{\partial X_6}+X_4\frac{\partial}{\partial X_7},$$

$$E_5: -(X_1+2X_3)\frac{\partial}{\partial X_1}-X_3\frac{\partial}{\partial X_3}-X_4\frac{\partial}{\partial X_4},$$

$$E_6: 2X_3\frac{\partial}{\partial X_1}-X_2\frac{\partial}{\partial X_2}-X_4\frac{\partial}{\partial X_4},\ E_7: -X_1\frac{\partial}{\partial X_1}-X_2\frac{\partial}{\partial X_2}-X_3\frac{\partial}{\partial X_3}-X_4\frac{\partial}{\partial X_4}.$$

Каждому из этих операторов соответствует преобразование присоединенной группы, являющееся внутренним автоморфизмом алгебры Ли L_6 группы G_7. Если $A_1, \ldots, A_7$ — матрицы этих внутренних автоморфизмов, то матрица общего автоморфизма A представляет собой произведение этих матриц

$$A=\begin{Vmatrix} a_5 & 0 & 2a_5a_6-2a_5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_6 & -a_4a_5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2a_5 & \dfrac{a_5}{a_3} & 0 & 0\\ a_1a_5 & 0 & a_5(a_3+2a_1a_6) & \dfrac{a_4a_5}{a_6} & \dfrac{1}{a_7} & 0\\ 0 & a_2a_6 & -a_5(2a_1+a_2a_4) & -\dfrac{a_4a_5}{a_6} & 0 & \dfrac{1}{a_7}\end{Vmatrix}a_7. \qquad (6)$$

Подвергнув этому общему преобразованию операторы алгебры Ли L_7, получим общий вид алгебры Ли всех подобных подгрупп. Так как всякий оператор однопараметрической подгруппы группы G_6^3 может быть представлен в виде

$$X=\sum_{i=1}^{7} e^i X_i, \qquad (7)$$

где e^i — координаты вектора $\bar{e}$, то подвергнуть X общему автоморфизму с матрицей A означает то же самое, что подвергнуть вектор $\bar{e}\{e^1, e^2, \ldots, e^7\}$ преобразованию с транспонированной матрицей A^*. В результате, выбирая подходящие конкретные преобразования, по аналогии с методикой [1], получаем систему векторов

$$\{0,0,1,0,0,0\},\ \{0,0,0,1,0,0\},\ \{1,0,0,0,0,0\},\ \{0,1,0,0,0,0\},$$
$$\{1,0,0,0,1,0\},\ \{0,0,0,0,0,1\},\ \{1,0,0,0,0,1\},\ \{1,0,0,1,0,0\},$$
$$\{0,1,1,1,0,0\},\ \{0,1,0,0,1,0\},\ \{0,0,1,0,1,\alpha\},$$

где α — некоторая постоянная.

Этой системе векторов соответствуют группы преобразований $H\langle X\rangle$, являющиеся подгруппами группы G_7^3 уравнения (4), а инфинитезимальные операторы X определяются равенством (7):

$$H_1\langle X_3\rangle, H_2\langle X_4\rangle, H_3\langle X_1\rangle, H_4\langle X_2\rangle, H_5\langle X_1+X_5\rangle, H_6\langle X_6\rangle, H_7\langle X_1+ + X_4\rangle, H_8\langle X_2+X_3+X_4\rangle, H_9\langle X_1+X_6\rangle, H_{10}\langle X_2+ + X_5\rangle, H_{11}\langle X_3+X_5+\alpha X_6\rangle, \ H_{12}\langle X_6+\alpha X_7\rangle.$$

Таким образом, построена оптимальная система однопараметрических подгрупп алгебры Ли L_7, допускаемой уравнением (4), в смысле определения, данного в [4]. Исключая из рассмотрения подгруппы H_1 и H_2, на которых нельзя построить инвариантные H-решения ранга $\rho=1$ (так как они не удовлетворяют необходимому условию существования H-решений [1]), найдем существенно различные частные решения рассматриваемого уравнения на подгруппах H_i $(i=3, 4, \ldots, 11)$.

Подгруппы H_3 и H_4 — однопараметрические группы сдвига по координате (H_3) и времени (H_4). Их инвариантами будут соответственно функции

$$H_3: I_1=x, \ I_2=u(x,t)=V(I_1); \ H_4: I_1=t, \ I_2=u(x,t)=V(I_1).$$

Подставляя полученные выражения для u и ее производных в (4), получаем следующие, так называемые, уравнения S/H_3 и S/H_4: $V''(x)\times\times\exp[V'(x)]=0$, $V''(t)=0$, приводящие к H_3- и H_4-решениям уравнения (4) соответственно вида

$$u(x,t)=c_1x+c_2, \quad u(x,t)=c_1t+c_2. \tag{8}$$

Инвариантами подгруппы $H_5: \{\bar{x}=a(x+1)-1, \bar{t}=t, \bar{u}=2(x+1)\ln a-2+u\}$, где a — параметр, являются функции $I_1=t$, $I_2=(u-2)\times\times(x+1)^{-1}-2\ln(x+1)=V(I_1)$, с помощью которых H_5-решение уравнения (4) можно выразить в виде

$$u(x,t)=(x+1)V(t)+2(x+1)\ln(x+1)-2. \tag{9}$$

Если теперь вычислить u_x, u_{xx}, u_{tt} и подставить их в исходное уравнение, то получим уравнение S/H_5 для определения функции $V(t)$: $V''=2\exp(V)$. Это нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение можно решить, полагая $V'=p(V)$. Тогда уравнение

$$pp'=2\exp(V) \text{ или } pp'dV=2\exp(V)\,dV$$

интегрируется и его решение приводит к уравнению первого порядка для $V(t)$:

$$V'(t)=\sqrt{4\exp[V(t)]+c_1} \text{ или } \frac{V'dt}{\sqrt{4\exp(V)+c_1}}=dt.$$

Интегрируя, получаем равенство

$$t+c_2=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{4\exp(V)+c_1}-\sqrt{c_1}}{\sqrt{4\exp(V)+c_1}+\sqrt{c_1}}\right|,$$

откуда

$$V(t)=\sqrt{c_1}(t+c_2)-\ln[1+\exp(\sqrt{c_1}(t+c_2))(\exp\sqrt{c_1}(t+c_2)-2)]+\ln c_1. \tag{10}$$

Инвариантные H_6-решения выражаются через инварианты группы $H_6: \{\bar{x}=x, \bar{t}=at, \bar{u}=u-2ax\}$: $I_1=\bar{x}$, $I_2=u+2x\ln t=V(I_1)$ в виде

$$u(x,t)=V(x)-2x\ln t, \tag{11}$$

где $V(x)$ — решение уравнения $S/H_6: V'' \exp(V') = [\exp(V')]' = 2x$ вида

$$V(x) = x \ln|x^2 + c_1^2| - 2x - 2c_1 \operatorname{arctg} \frac{x}{c_1} + c_2. \tag{12}$$

Функция

$$u(x, t) = xt + c_1 t + c_2 \tag{13}$$

является H_7-решением рассматриваемого уравнения (4), инвариантным относительно группы преобразований $H_7: \{\bar{x} = x + a,\ \bar{t} = t,\ \bar{u} = u + ta\}$ с инвариантами $I_1 = t$, $I_2 = u - xt$.

Подгруппа $H_8: \{\bar{x} = x, \bar{t} = t + a,\ \bar{u} = u + (t+1)a\}$, инварианты которой имеют вид $I_1 = x$, $I_2 = u - (t+1)^2 = V(I_1)$, приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению вида $[\exp(V')]' = 2$, т. е. $V' = \ln(2x + c_1)$, решение которого $V(x) = \frac{1}{2}(2x + c_1)\ln(2x + c_1) - x + c_2$ дает точное частное решение уравнения (4), являющееся инвариантным H_8-решением

$$u(x, t) = \frac{2x + c_1}{2} \ln(2x + c_1) - x + c_2 + (t+1)^2. \tag{14}$$

Аналогично строятся инвариантные H-решения на подгруппах H_9—H_{11}:

$$H_9: \{\bar{x} = x + a, \bar{t} = at, \bar{u} = u - 2xa\},$$

$$H_{10}: \{\bar{x} = ax, \bar{t} = t + a, \bar{u} = au + (t+1)a\},$$

$$H_{11}: \{\bar{x} = ax, \bar{t} = a^\alpha t, \bar{u} = au - 2(\alpha - 1)x(1 + \ln a) + a - 1\}.$$

Ими будут соответственно решения

$$u(x, t) = V(\eta) + 2\eta \ln t + \ln^2 t,\ \eta = x - \ln t, \tag{15}$$

$$u(x, t) = e^t [V(\eta) + 2\eta t],\ \eta = xe^t, \tag{16}$$

$$u(x, t) = t^\beta [V(\eta) + 2\beta(1 - \alpha)\eta \ln t],\ \eta = xt^{-\beta}. \tag{17}$$

При этом функции $V(\eta)$ определяются решениями соответствующих уравнений S/H:

$$V''[1 - \exp(V')] + V' - 2(\eta + 1) = 0, \tag{18}$$

$$V''[\eta^2 - \exp(V')] - \eta V' + V = 0, \tag{19}$$

$$V''[\beta\eta^2 + \exp(V')] - 2(1 - \alpha)\beta^2\eta V' -$$

$$- (1 - \alpha)\beta^3 V - 2(1 - \alpha)\beta\eta = 0 \quad (\beta = \alpha^{-1}), \tag{20}$$

которые не удается решить в замкнутом виде.

Таким образом, получен класс существенно различных инвариантных H-решений ранга единица, являющихся частными решениями уравнения (4). Причем решения (8), (9), (11), (13), (14) являются точными частными решениями уравнения (4). Если теперь, выполняя основное свойство инвариантных решений [1], подвергнуть полученные H-решения различным преобразованиям основной группы, представленной базисом (2), (5), то класс известных решений рассматриваемого уравнения можно значительно расширить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962. 238 с.
2. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., Изд-во иностр. лит., 1947. 358 с.
3. Березовский А. А., Негесова Т. М. О приводимости квазилинейных па-

раболических и гиперболических уравнений.— В кн.: Аналитические, численные и аналоговые методы решений дифференциальных уравнений. К., «Наук. думка», 1977, с. 71—81.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности.— ДАН СССР, 1959, **125**, № 3, с. 492—496.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 20.VI. 1976 г.,
после переработки — 3.I. 1977 г.