УДК 519.3

В. И. Коробов, А. В. Луценко

Управляемость линейной стационарной системы на подпространство за нефиксированное время

В работе исследуется вопрос о попадании из произвольной точки пространства E_n на заданное подпространство по траекториям системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где A, B — постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, $x \in E_n$, $u \in E_r$.

Как известно, условия управляемости системы (1) из точки в точку одинаковы как в случае, когда время перехода T из точки x_0 в точку x_1 зависит от этих точек $T = T(x_0, x_1)$, так и в случае, когда время перехода одно и то же для всех пар x_0, x_1 (см. [1—3]). В задаче об управляемости на подпространство сталкиваемся с иной ситуацией: условия, необходимые и достаточные для попадания на подпространство за фиксированное время (см. [4]), перестают быть необходимыми, если время попадания T зависит от начальной точки $T = T(x_0)$.

Определение 1. Система (1) называется управляемой на множество $G \subset E_n$, если для любой точки $x_0 \in E_n$ существует время $T(x_0)$ и заданное на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T(x_0)$ измеримое управление $u(t, x_0)$ такое, что траектория системы (1) при $u = u(t, x_0)$, начинающаяся при $t = 0$ в точке x_0, в момент времени $T(x_0)$ попадает на G.

Определение 2. Множество $Q \subset E_n$ называется достижимым в силу системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{2}$$

если для любой точки $x_0 \in E_n$ существует время $T(x_0)$ такое, что траектория системы(2), начинающаяся в точке x_0 при $t = 0$, в момент времени $T(x_0)$ достигает множества Q.

Обозначим через L подпространство, натянутое на вектор-столбцы матрицы $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$, через K — подпространство, натянутое на корневые векторы матрицы A, отвечающие вещественным собственным значениям этой матрицы.

В п. 1 доказана теорема об эквивалентности задачи управляемости системы (1) на множество G задаче достижимости в силу системы (2) более широкого множества $L + G$. В п. 2 с помощью этой теоремы получены условия управляемости системы (1) на подпространство.

1. Теорема 1. *Система* (1) *управляема на множество* G *тогда и только тогда, если множество* $L + G$ *достижимо в силу системы* (2).

Доказательство. Необходимость. Для каждой точки $x_0 \in E_n$ существует время $T(x_0)$ и управление $u(t, x_0)$, заданное на отрезке $[0, T(x_0)]$ такое, что $x(T) \in G$, где

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau, x_0)\,d\tau.$$

Используя представление $e^{A(T-\tau)}$ в виде степенного ряда, получаем, что вектор $\int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau, x_0)\,d\tau$ принадлежит подпространству L. Поэтому $e^{AT}x_0 \in (L+G)$, следовательно, множество $L+G$ достижимо в силу системы (2).

Достаточность. Так как множество $L+G$ достижимо из точки x_0 за время $T = T(x_0)$, то $e^{AT}x_0 \in (L+G)$, т. е. $e^{AT}x_0 = l + g$, где $l \in L, g \in G$. Система (1) в подпространстве L полностью управляема (см. [3]), так что существует управление $u(t)$, переводящее точку $x = 0$ в точку $x = -l$ за время $T = T(x_0)$. Поэтому

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = l + g - l = g,$$

т. е. $x(T) \in G$.

2. Пусть G — подпространство размерности $n-k$. Если $k \geqslant 2$, то существуют точки $x_0 \in E_n$, из которых попасть на G согласно системе (2) невозможно. Действительно, если рассмотреть систему с обращенным временем $\frac{dx}{dt} = -Ax$, то все точки $x \in E_n$, из которых можно попасть на G в силу системы (2), опишутся соотношениями

$$x = e^{-At}y_0,\ y_0 \in G,\ 0 \leqslant t < \infty.$$

Эти соотношения задают в пространстве E_n гладкую $(n-k+1)$-мерную поверхность, которая не может заполнить все пространство. Таким образом, остается исследовать случай $(n-1)$-мерного подпространства.

Теорема 2. *Для того, чтобы имело место попадание на $(n-1)$-мерное подпространство G в силу системы $\frac{dx}{dt} = Ax$, необходимо и достаточно, чтобы корневые подпространства матрицы A, отвечающие вещественным собственным значениям, содержались в G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(n-1)$-мерное подпространство G задается соотношением $h'x = 0$, где h — n-мерный вектор. (Всюду в дальнейшем штрих означает транспонирование.)

Предположим, что условие теоремы не выполнено. Тогда существует собственный вектор v_1 матрицы A, отвечающий одному из вещественных собственных значений (например, λ_i), такой, что среди всех линейно независимых корневых векторов, порожденных вектором v_1, содержится по крайней мере один, не принадлежащий G. Обозначим через v_j корневой вектор высоты j, а $v_1, v_2, \ldots, v_{m_i}$ — все линейно независимые корневые векторы, порожденные вектором v_1. Будем считать, что для $j \leqslant p-1$ $v_j \in G$, а $v_p \bar{\in} G$ $(p \leqslant m_i)$. Покажем, что траектория $x(t)$, выходящая из начальной точки $x_0 = v_p$, не попадает на подпространство G, т. е. покажем, что $h'x(t) \neq 0$ при $t \geqslant 0$. Действительно,

$$h'x(t) = h'e^{At}v_p = e^{\lambda_i t}\left[h'v_p + \ldots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}h'v_1\right] = e^{\lambda_i t}h'v_p \neq 0.$$

Достаточность. Для доказательства того, что из произвольного начального вектора $x_0 \in E_n$ можно попасть на G, разложим вектор x_0 по корневым подпространствам матрицы A: $x_0 = \sum_j v^j$, где v^j — проекция вектора x_0 на корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ_j, а слагаемых в сумме столько, сколько различных собственных значений у матрицы A. Отметим, что если $\operatorname{Im} v^j \neq 0$, то сумма содержит сопряженный вектор $\bar{v}^j$, поэтому $\sum_j v^j$ является вещественным вектором. Тогда

$$h'x(t) = h' \sum_j e^{At} v^j. \tag{3}$$

Пусть v^j — корневой вектор высоты k_j. Имеем

$$e^{At} v^j = e^{\lambda_j t} \left[v^j + t v_1^j + \ldots + \frac{t^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} v_{k_j - 1}^j \right],$$

где v_s^j — корневой вектор высоты $k_j - s$, соответствующий собственному значению λ_j. Представим множество индексов j в виде объединения $J_1 \cup J_2$, где J_1 соответствует собственным значениям λ с $\operatorname{Im} \lambda = 0$, а J_2 — остальным собственным значениям. Для $j \in J_1$ корневые векторы по условию теоремы лежат в G, поэтому $h' v_s^j = 0$ $(j \in J_1)$, а значит равенство (3) принимает вид

$$h'x(t) = \sum_{j \in J_2} e^{\lambda_j t} h' \left[v^j + t v_1^j + \ldots + \frac{t^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} v_{k_j - 1}^j \right].$$

Выделим действительную и мнимую части собственных значений λ_j и векторов v^j, v_s^j; пусть $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$, $v^j = w_{01}^j + i w_{02}^j$, $v_s^j = w_{s1}^j + i w_{s2}^j$. Тогда

$$h'x(t) = \sum_{j \in J_2} e^{\mu_j t} \Big[(h' w_{01}^j \cos \nu_j t - h' w_{02}^j \sin \nu_j t) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{t^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} (h' w_{k_j - 11}^j \cos \nu_j t - h' w_{k_j - 12}^j \sin \nu_j t) \Big]. \tag{4}$$

Теорема будет доказана, если покажем, что существует такой момент времени $t = T$, что $h'x(T) = 0$. Обозначим $\mu = \max\limits_{j \in J_2} \mu_j$. Пусть $J_3 = \{i_1, \ldots, i_s\}$ — множество всех тех индексов, для которых $\mu_{i_1} = \ldots = \mu_{i_s} = \mu$. Обозначим $k = \max\limits_{j \in J_3} (k_j - 1)$. Пусть $J_4 = \{j_1, \ldots, j_r\}$ — все те индексы из J_3, для которых $k_{j_1} - 1 = \ldots = k_{j_r} - 1 = k$. Тогда (4) можно представить в виде

$$h'x(t) = \frac{t^k}{k!} e^{\mu t} \sum_{j \in J_4} (h' w_{k1}^j \cos \nu_j t - h' w_{k2}^j \sin \nu_j t) + R(t),$$

где в $R(t)$ включены оставшиеся слагаемые из правой части соотношения (4).

Заметим, что функция

$$\Phi(t) = \sum_{j \in J_4} (h' w_{k1}^j \cos \nu_j t - h' w_{k2}^j \sin \nu_j t)$$

— конечная тригонометрическая сумма с нулевым средним значением на интервале $0 \leqslant t < \infty$. В силу свойств почти периодических функций для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется $l > 0$ такое, что функция $\Phi(t)$ принимает значения большие, чем ε, и меньшие, чем $(-\varepsilon)$, на каждом интервале длины l (см. [5]).

Отсюда следует, что при достаточно большом n на интервале $(n-1)l \leqslant t \leqslant nl$ выражение $e^{\mu t} \frac{t^k}{k!} \Phi(t)$ можно сделать как положительным, так и отрицательным и одновременно $\left| e^{\mu t} \frac{t^k}{k!} \Phi(t) \right| > |R(t)|$. Это означает, что на интервале $(n-1)\, l \leqslant t \leqslant nl$ существует нуль функции $h' x(t)$.

Из доказанных выше теорем 1, 2 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Для того, чтобы система* (1) *была управляемой на подпространство* G, *необходимо и достаточно, чтобы размерность подпространства* $L + G$ *была не меньше* $n - 1$ *и чтобы подпространство* K, *натянутое на корневые векторы матрицы* A, *отвечающие вещественным собственным значениям, принадлежало подпространству* $L + G$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления.— Труды I Международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению. Москва 27 июня — 7 июля 1960 г. Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем. М., Изд-во АН СССР, 1961, с. 521—548.
2. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М., «Наука», 1970. 453 с.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968. 472 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971. 507 с.
5. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972. 574 с.

Харьковский
государственный университет

Поступила в редакцию
17.VI. 1974 г.