УДК 517.946

В. Н. Лаптинский

Метод вариации параметра и мультипликативный интеграл

В этой заметке изучается задача о представлениях фундаментальной матрицы линейной системы мультипликативными интегралами по параметру на основе метода вариации параметра, идея которого изложена в [1], а некоторые приложения анонсированы в [2].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \lambda)\, x, \quad x \in R^n, \quad A : R^n \to R^n, \tag{1}$$

в котором $A(t, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных $t, \lambda \in D\{t, \lambda : t, \lambda \in I_T \times I_\Lambda\}$, $I_T = [0, T]$, $I_\Lambda = [0, \Lambda]$, и непрерывно дифференцируема по параметру λ.

Если $A(t, \lambda_0) = 0$, $\lambda_0 \in I_\Lambda$, $\forall t \in I_T$, то, как следует из [1] (см. также [2]), фундаментальная матрица $U(t, t_0; \lambda, \lambda_0)$, $U(t_0, t_0; \lambda, \lambda_0) = U(t, t_0; \lambda_0, \lambda_0) = E$, $\forall t, \lambda \in D$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = P(t, t_0; \lambda)\, U, \tag{2}$$

где $P = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(t, t_0; \lambda)$, $\quad P_{r+1} = \int\limits_{t_0}^{t} [A(\tau, \lambda), P_r(\tau, \lambda)]\, d\tau$, $\quad r = 0, 1, 2, \ldots$,

$$P_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial A}{\partial \lambda}\, d\tau, \quad [\Phi, S] \overset{\text{def}}{=} \Phi S - S\Phi.$$

Матрица $U(t, t_0; \lambda, \lambda_0)$, очевидно, представима в виде

$$U = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda} P(t, t_0; \mu_1)\, d\mu_1 \int_{\lambda_0}^{\mu_1} P(t, t_0; \mu_2)\, d\mu_2 \ldots \int_{\lambda_0}^{\mu_{k-1}} P(t, t_0; \mu_k)\, d\mu_k. \qquad (3)$$

Напомним, что если исходить из уравнения (1), то (см., например, [3, с. 56])

$$U = E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} A(t_1, \lambda)\, dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2, \lambda)\, dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{r-1}} A(t_r, \lambda)\, dt_r. \qquad (4)$$

Теперь переходим к задаче о представлениях матрицы U мультипликативными интегралами. Сначала разобьем интервал $I_\lambda = [\lambda_0, \lambda]$ на s частичных интервалов $[\lambda_0, \lambda_1], [\lambda_1, \lambda_2], \ldots, [\lambda_{s-1}, \lambda_s]$, $\lambda_s = \lambda$. Воспользовавшись основным свойством матрицанта [4, с. 431], для $U(t, t_0; \lambda, \lambda_0)$ получим мультипликативное расщепление

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = U(t, t_0; \lambda, \lambda_{s-1}) \ldots U(t, t_0; \lambda_2, \lambda_1)\, U(t, t_0; \lambda_1, \lambda_0). \qquad (5)$$

Отсюда по известной схеме имеем

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \lim_{\Delta\lambda_j \to 0} [E + P(t, t_0; \gamma_s)\, \Delta\lambda_s] \ldots$$
$$\ldots [E + P(t, t_0; \nu_2)\, \Delta\lambda_2]\, [E + P(t, t_0; \nu_1)\, \Delta\lambda_1], \qquad (6)$$

где $\nu_j \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$, $\Delta\lambda_j = \lambda_j - \lambda_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Предел в (6), очевидно, существует, его назовем мультипликативным интегралом по параметру, обозначив символом

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \widehat{\int_{\lambda_0}^{\lambda}} [E + P(t, t_0; \mu)\, d\mu]. \qquad (7)$$

Если исходить из формулы

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \lim_{\Delta\lambda_j \to 0} \{\exp [P(t, t_0; \nu_s)\, \Delta\lambda_s] \ldots$$
$$\ldots \exp [P(t, t_0; \nu_2)\, \Delta\lambda_2] \exp [P(t, t_0; \nu_1)\, \Delta\lambda_1]\}, \qquad (8)$$

то можем записать

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \widehat{\int_{\lambda_0}^{\lambda}} \exp [P(t, t_0; \mu)\, d\mu]. \qquad (9)$$

Эта формула также дает представление матрицанта в виде мультипликативного интеграла другого типа.

Заметим, что выражения, стоящие под знаком предела в правых частях равенств (6), (8), могут быть использованы для приближенного вычисления матрицанта.

А можно поступать так. Разобьем интервал $I_t = [t_0, t]$ на k частичных $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots, [t_{k-1}, t_k]$, $t_k = t$. Согласно [4, с. 431] имеем

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = U(t, t_{k-1}; \lambda, \lambda_0) \ldots U(t_2, t_1; \lambda, \lambda_0)\, U(t_1, t_0; \lambda, \lambda_0). \qquad (10)$$

По формуле (5) можем записать

$$U(t_i, t_{i-1}; \lambda, \lambda_0) = U(t_i, t_{i-1}; \lambda, \lambda_{s-1}) \ldots U(t_i, t_{i-1}; \lambda_2, \lambda_1)\, U(t_i, t_{i-1}; \lambda_1, \lambda_0),$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$

Здесь

$$U(t_i, t_{i-1}; \lambda_j, \lambda_{j-1}) = E + \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} P(t_i, t_{i-1}; \lambda)\, d\lambda + \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda_j} P(t_i, t_{i-1}; \lambda)\, d\lambda \times$$

$$\times \int_{\lambda_{j-1}}^{\lambda} P(t_i, t_{i-1}; \mu)\, d\mu + \ldots .$$

Учитывая это, из (10) получаем

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = U(t, t_{k-1}; \lambda, \lambda_{s-1}) \ldots U(t, t_{k-1}; \lambda_2, \lambda_1)\, U(t, t_{k-1}; \lambda_1, \lambda_0) \ldots$$

$$\ldots U(t_2, t_1; \lambda, \lambda_{s-1}) \ldots U(t_2, t_1; \lambda_2, \lambda_1)\, U(t_2, t_1; \lambda_1, \lambda_0)\, U(t_1, t_0; \lambda, \lambda_{s-1}) \ldots$$

$$\ldots U(t_1, t_0; \lambda_2, \lambda_1)\, U(t_1, t_0; \lambda_1, \lambda_0). \tag{11}$$

Формула (11) также может быть использована для приближенного вычисления матриципанта.

Фактически область $I_t \times I_\lambda$ разбита на ks частичных областей, которые занумеруем некоторым образом. Перейдем теперь в (11) к пределу при неограниченном увеличении числа частичных областей и стремлении к нулю их диаметров. С учетом свойств матрицы $P(t, t_0; \lambda)$ точные предельные формулы в зависимости от способа локального представления $U(t_i, t_{i-1}; \lambda_j, \lambda_{j-1})$ примут вид

$$U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \widehat{\iint_{I_t \times I_\lambda}} \left[E + \frac{\partial A}{\partial \lambda}\, dt d\lambda\right], \qquad U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \widehat{\iint_{I_t \times I_\lambda}} \exp\left[\frac{\partial A}{\partial \lambda}\, dt d\lambda\right].$$

Приведенные выше предельные формулы здесь обозначены мультипликативными интегралами, которые по аналогии с обычными назовем двойными мультипликативными интегралами по области $I_t \times I_\lambda$. Порядок элементарных сомножителей указан в (11).

Формулы $U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \widehat{\int_{t_0}^{t}} [E + A(t, \lambda)\, dt]$ и (7) можно назвать повторными мультипликативными интегралами. То же справедливо относительно (9) и формулы $U(t, t_0; \lambda, \lambda_0) = \widehat{\int_{t_0}^{t}} \exp[A(t, \lambda)\, dt]$.

В заключение приведем одно свойство «фундаментальных матриц» уравнения (1).

Теорема. *Матрицы* $U(t_2, t_1; \lambda_1, \lambda_0)$, $U(t_1, t_0; \lambda_2, \lambda_1)$, $t_i, \lambda_i \in D$, $i = 0, 1, 2$, *коммутируют.*

Доказательство. Имеем

$$U(t_2, t_0; \lambda_2, \lambda_1)\, U(t_2, t_0; \lambda_1, \lambda_0) = U(t_2, t_1; \lambda_2, \lambda_0)\, U(t_1, t_0; \lambda_2, \lambda_0). \tag{12}$$

Согласно (5), (10) можем записать

$$U(t_i, t_{i-1}; \lambda_2, \lambda_0) = U(t_i, t_{i-1}; \lambda_2, \lambda_1)\, U(t_i, t_{i-1}; \lambda_1, \lambda_0),$$

$$U(t_2, t_0; \lambda_j, \lambda_{j-1}) = U(t_2, t_1; \lambda_j, \lambda_{j-1})\, U(t_1, t_0; \lambda_j, \lambda_{j-1}), \quad i, j = 1, 2.$$

С учетом этого из (12) следует требуемое правило коммутации.

Автор выражает благодарность участникам Минского городского семинара, руководимого Ю. С. Богдановым, за полезное обсуждение приведенных выше результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаптинский В. Н. К теории представлений интегральных матриц линейных дифференциальных систем.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 5, с. 827—837.
2. Лаптинский В. Н. О линейных системах с периодическими коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 10, с. 1899—1901.
3. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, Изд-во АН БССР, 1963. 269 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967. 575 с.

Могилевский филиал Института физики
АН БССР

Поступила в редакцию
24.XII. 1975 г.