УДК 517.944

В. Б. Мосеенков

Квазипериодические решения нелинейного волнового уравнения с затуханием

В данной статье рассматриваются вопросы существования и гладкости квазипериодических решений нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + \varepsilon F(t, x, u) = 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$$

и исследуется их устойчивость.

Относительно функции $F(t, x, u)$ предполагается следующее: 1) $F(t, x, u) \in C^r(R^1 \times [0, \pi] \times R^1)$; 2) $F(t, 0, 0) = F(t, \pi, 0) = 0$; 3) $F(t, x, 0) \in H_r$, где H_r — пространство квазипериодических по t функций с частотным базисом $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, снабженное нормой $\| u \|_r^2 = \sum\limits_{j,k} (1 + j^2 + |k|^2)^r |u_{jk}|^2$ (u_{jk} — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $u(t, x)$ по системе $\{\sin jx e^{i(k,\omega)t}\}$, $j \neq 0$), ε — малый параметр.

Теорема 1. *Пусть $g \in H_r$, $\alpha^2 < 2$; тогда найдется единственное $v \in H_r$ такое, что*

$$Lv \equiv v_{tt} - v_{xx} + \alpha v_t = g, \qquad v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, \tag{2}$$

$$\| v \|_r \leqslant c \| g \|_r, \tag{3}$$

где c зависит только от α.

Доказательство. Поскольку семейство $\{\sin jx e^{i(k,\omega)t}\}$ плотное в H_0, для $g(t, x)$ можно записать разложение Фурье: $g(t, x) = \sum\limits_{j \neq 0, k} g_{jk} \sin jx e^{i(k,\omega)t}$.

Разыскивая решение уравнения (2) в виде $v(t, x) = \sum\limits_{j \neq 0, k} v_{jk} \sin jx e^{i(k,\omega)t}$, получаем $v_{jk} = g_{jk} [j^2 - |(k, \omega)|^2 + i\alpha (k, \omega)]^{-1}$.

Таким образом,

$$\| v \|_r^2 = \sum_{j \neq 0, k} \frac{(1 + j^2 + |k|^2)^r}{[j^2 - |(k, \omega)|^2]^2 + \alpha^2 |(k, \omega)|^2} |g_{jk}|^2.$$

При $\alpha^2 < 2$ выражение, стоящее в знаменателе, можно оценить следующим образом:

$$[j^2 - |(k, \omega)|^2]^2 + \alpha^2 |(k, \omega)|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \begin{cases} 1 & \text{при } \; |j^2 - |(k, \omega)|^2| \geqslant 1, \\ \alpha^2 & \text{при } \; |j^2 - |(k, \omega)|^2| < 1, \quad |(k, \omega)| \geqslant 1, \\ \alpha^2 - \dfrac{\alpha^4}{4} & \text{при } \; |j^2 - |(k, \omega)|^2| < 1, \quad |(k, \omega)| < 1. \end{cases}$$

Эта оценка следует из неравенства $(x^2 - 1)^2 + \alpha^2 x^2 \leqslant \alpha^2 - \dfrac{\alpha^4}{4}$.

Значит, $\| v \|_r^2 \leqslant \dfrac{4}{4\alpha^2 - \alpha^4} \| g \|_r^2$, откуда следует оценка (3).

Теорема 2. *Если* $r > \dfrac{m+1}{2}$, $\alpha^2 < 2$, *то при достаточно малом* $|\varepsilon|$ *уравнение* (1) *имеет решение в* H_j, $j < r$.

Доказательство. Решение задачи (1) будем искать в виде $u = \varepsilon \tilde{u}(t, x, \varepsilon)$. Для нахождения этого решения построим итерационный процесс по следующей схеме:

$$\tilde{u}_0 \equiv 0,$$
$$L\tilde{u}_{n+1} = -F(t, x, \varepsilon\tilde{u}_n), \tag{4}$$
$$\tilde{u}_{n+1}(t, 0, \varepsilon) = \tilde{u}_{n+1}(t, \pi, \varepsilon) = 0.$$

Согласно теореме 1 задача (4) имеет единственное решение, если $F(t, x, \varepsilon\tilde{u}_n) \in H_r$. Лемма Мозера о суперпозиции функций [1, 2] обеспечивает выполнение последнего условия, если $\tilde{u}_n \in H_r \cap C = H_r$, $r > \dfrac{m+1}{2}$. Следовательно, поскольку $F(t, x, 0) \in H_r$, задача (4) будет единственно разрешима на каждом шаге.

В силу теоремы 1 и леммы Мозера [2]

$$\| \tilde{u}_1 \|_r \leqslant c \| F(t, x, 0) \|_r \leqslant cC_F[0] \leqslant 2cC_F[1],$$

где $C_F[s]$ — неубывающая функция.

С другой стороны, согласно теореме вложения Соболева [3]

$$|\tilde{u}_1|_0 \leqslant a \| \tilde{u}_1 \|_r \leqslant 2acC_F[1], \quad r > \frac{m+1}{2}.$$

Обозначим $M = 2cC_F[1] \max\{1, a\}$ и предположим, что $\| \tilde{u}_n \|_r \leqslant M$, $| u_n |_0 \leqslant M$. Тогда, используя лемму Мозера [2] и выбирая ε из условия $|\varepsilon| M \leqslant 1$, получаем

$$\| \tilde{u}_{n+1} \|_r \leqslant c \| F(t, x, \varepsilon\tilde{u}_n) \|_r \leqslant cC_F[|\varepsilon| |u_n|_0] (1 + |\varepsilon| \| \tilde{u}_n \|_r) \leqslant$$
$$\leqslant cC_F[|\varepsilon| M] (1 + |\varepsilon| M) \leqslant 2cC_F[1] \leqslant M.$$

Таким образом, $\{\tilde{u}_n\}$ ограничена в H_r (и в C) константой M.

Пусть $\delta u_n = \tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n$, тогда согласно теореме о конечных приращениях

$$L\delta u_n = -[F(t, x, \varepsilon\tilde{u}_n) - F(t, x, \varepsilon\tilde{u}_{n-1})] = -\varepsilon F_u(t, x, \theta\varepsilon\tilde{u}_n +$$
$$+ (1 - \theta)\varepsilon\tilde{u}_{n-1}) \delta u_{n-1}.$$

Отсюда в силу теоремы 1

$$\| \delta u_n \|_0 \leqslant |\varepsilon| c \| F_u(t, x, \cdot) \delta u_{n-1} \|_0 \leqslant |\varepsilon| c \max_{t, x, |s| \leqslant 2} |F_u(t, x, s)| \| \delta u_{n-1} \|_0.$$

Выбирая ε из условия $|\varepsilon| c \max\limits_{t,x,|s|\leqslant 2} |F_u(t,x,s)| < 1$, получаем $\|\delta u_n\|_0 < \|\delta u_{n-1}\|_0$. Таким образом, $\{\tilde{u}_n\}$ сходится в H_0. Тогда согласно неравенству Ниренберга [1,4]

$$\|\delta u_n\|_j \leqslant \mathrm{const}\,\|\delta u_n\|_0^{1-j/r}\,\|\delta u_n\|_r^{j/r} \leqslant \mathrm{const}\, M^{j/r}\,\|\delta u_n\|_0.$$

Следовательно, $\tilde{u}_n$ сходится и в H_j, $j<r$, к $\tilde{u}$.

Замечание 1. В силу теоремы Соболева о вложении H_r в C^l [3] решение будет классическим, если $2+\dfrac{m+1}{2}<j<r$.

Теорема 3. *Квазипериодическое решение* $u=\varepsilon\tilde{u}(t,x,\varepsilon)$ *уравнения* (1) *при* $\alpha>0$ *асимптотически устойчиво в том смысле, что любое другое решение* $u_1\in H_r\cap\{|u_1-u|_0\leqslant K\}$ *при* $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0(K)$ *удовлетворяет условию*

$$|u_1-u|\leqslant Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}, \tag{5}$$

где γ — *константа, зависящая от* ε_0, α *и* F.

Доказательство. Пусть u_1 — решение задачи (1) и $|u_1-u|\leqslant K$, тогда $v=u_1-u$ удовлетворяет уравнению

$$v_{tt}-v_{xx}+\alpha v_t+\varepsilon(F(t,x,u+v)-F(t,x,u))\equiv Lv+\varepsilon\delta F=0.$$

Домножив обе части последнего равенства на $v_t+\lambda v$ (λ — положительный параметр) и выделив дивиргентную часть, его можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\,(v_t^2+v_x^2+2\lambda vv_t)+\lambda\alpha v^2)-\frac{\partial}{\partial x}\,(v_tv_x+\lambda vv_x)+(\alpha-\lambda)\,v_t^2+$$
$$+\lambda v_x^2+\varepsilon\,(v_t+\lambda v)\,\delta F=0.$$

Отсюда после интегрирования по x, $0\leqslant x\leqslant\pi$, в силу краевых условий получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\pi P(t,x)\,dx+\int\limits_0^\pi Q(t,x)\,dx=0, \tag{6}$$

где

$$Q(t,x)=(\alpha-\lambda)\,v_t^2+\lambda v_x^2+\varepsilon\,(v_t+\lambda v)\,\delta F,$$

$$P(t,x)=\frac{1}{2}\,(v_t^2+v_x^2+2\lambda vv_t+\lambda\alpha v^2)=\frac{1}{2}\,[(v_t+\lambda v)^2+$$
$$+(\alpha\lambda-\lambda^2)\,v^2+v_x^2]>0$$

при $0<\lambda<\alpha$.

Запишем равенство (6) в виде

$$e^{-\gamma t}\frac{\partial}{\partial t}\,e^{\gamma t}\int\limits_0^\pi P\,dx+\int\limits_0^\pi (Q-\gamma P)\,dx=0 \tag{7}$$

и предположим, что найдется константа γ такая, что

$$\int\limits_0^\pi Q\,dx\geqslant\gamma\int\limits_0^\pi P\,dx. \tag{8}$$

Тогда из соотношения (2) найдем

$$e^{-\gamma t}\frac{\partial}{\partial t}e^{\gamma t}\int_0^\pi P dx \leqslant 0,$$

т. е.

$$\int_0^\pi P(t,x)dx \leqslant e^{-\gamma t}\int_0^\pi P(0,x)\,dx.$$

Отсюда в силу

$$|v| \leqslant \left|\int_0^x v_x dx\right| \leqslant \int_0^\pi |v_x| dx \leqslant \sqrt{\pi}\left(\int_0^\pi v_x^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\left(\int_0^\pi P dx\right)^{1/2}$$

получим

$$|v(t,x)| \leqslant \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\int_0^\pi P(0,x)\,dx\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\pi}\left\{\int_0^\pi [(1+\lambda)\,v_t^2(0,x) + \right.$$

$$\left. + (\lambda+\alpha\lambda)\,v^2(0,x) + v_x^2(0,x)]\,dx\right\}^{1/2} e^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

что и доказывает оценку (5).

Докажем оценку (8). Пусть $|v|_0 \leqslant K$ (такое K найдется, поскольку при $r > \frac{m+1}{2}$ u_1 ограничено в силу теоремы Соболева [3]) и

$$M(K) = \sup_{t,x,|\varphi|\leqslant|u|_0+K}|F_u(t,x,\varphi)|.$$

Тогда

$$Q(t,x) \geqslant (\alpha-\lambda)\,v_t^2 + \lambda v_x^2 - |\varepsilon|\,M\,|(v_t+\lambda v)\,v| \geqslant$$

$$\geqslant (\alpha-\lambda)\,v_t^2 + \lambda v_x^2 - \frac{1}{2}\,|\varepsilon|\,M\,[v_t^2 + (1+2\lambda)\,v^2].$$

Из этого неравенства в силу $\int_0^\pi v^2 dx \leqslant \pi^2\int_0^\pi v_x^2 dx$ получаем

$$\int_0^\pi Q dx \geqslant \left(\alpha-\lambda-\frac{1}{2}\,|\varepsilon|\,M\right)\int_0^\pi v_t^2 dx + \left[\lambda - \frac{\pi^2}{2}\,|\varepsilon|\,M\,(1+2\lambda)\right]\int_0^\pi v_x^2 dx.$$

С другой стороны,

$$\int_0^\pi P dx \leqslant \frac{1}{2}\,(1+\lambda\pi^2+\alpha\lambda\pi^2)\int_0^\pi (v_t^2+v_x^2)\,dx.$$

Таким образом, выбирая ε_0 из условия

$$\varepsilon_0 < \frac{2}{M(K)}\min\left\{\alpha-\lambda, \frac{\lambda}{\pi^2(1+2\lambda)}\right\}, \quad 0<\lambda<\alpha,$$

получаем оценку (8) с константой

$$\gamma = \frac{2\min\left\{\alpha-\lambda-\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 M(K), \lambda - \frac{\pi^2}{2}\,\varepsilon_0 M(K) - \pi^2\lambda\varepsilon_0 M(K)\right\}}{1+\lambda\pi^2+\alpha\lambda\pi^2}.$$

Следствие. *Решение задачи* (1) *единственно, если выполняются условия теорем* 2 *и* 3.

Замечание 2. Поскольку

$$P(t, x) \geqslant \frac{1}{2}(v_t^2 + v_x^2 + \alpha\lambda v^2 - 2\lambda |v| |v_t|) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)v_t^2 + v_x^2 + \frac{\lambda}{\alpha}(|v_t| - \alpha|v|)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)v_t^2 + v_x^2\right]\right.$$

при $0 < \lambda < \alpha$, u_t и u_x также асимптотически устойчивы.

Замечание 3. Все предыдущие результаты имеют место для $\alpha^2 \geqslant 2$, так как и в этом случае выполняется оценка (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rabinowitz P. H. Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations.— Communications on Pure and Applied Mathematics, 1967, 20, N 1, p. 145—205.
2. Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.— УМН, 1968, 23, вып. 4, с. 179—238.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
4. Nirenberg L. On Elliptic Partial Differential Equations.— Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1959, Ser. 3, 13, p. 116—162.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
28.VII. 1976 г.