УДК 518:517.948

М. Н. Присяжнюк

Об условиях применения одного проекционно-итеративного метода

1. Пусть дано нелинейное операторное уравнение

$$x = T(x), \tag{1}$$

где $T(x)$ — непрерывная нелинейная операция, переводящая банахово пространство E в E.

Для решения нелинейных операторных уравнений общего вида Л. В. Канторович предложил и исследовал итеративный метод, являющийся обобщением известного метода касательных Ньютона.

В применении к уравнению (1) этот метод заключается в том, что последовательные приближения x_n к решению определяются из уравнений

$$x_{n+1} = T(x_n) - T'(x_n)\, x_n + T'(x_n)\, x_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

или

$$x_{n+1} \quad T(x_n) - T'(x_0)\, x_n + T'(x_0)\, x_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $T'(x_n)$ — производная Фреше оператора $T(x)$ в точке x_n, x_0 — некоторое начальное приближение.

При различных предположениях методы (2) и (3) рассматривались многими авторами.

Заметим, что, несмотря на линейность уравнений (2) и (3), решение их в общем случае, когда $T'(x_n)$ и $T'(x_0)$ — не вырождены, затруднительно.

В работе [1] рассмотрены алгоритмы, согласно которым последовательные приближения определяются соответственно из уравнений

$$x_{n+1} = T(x_n) + PT'(x_n)\, x_{n+1} - PT'(x_n)\, x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

или

$$x_{n+1} = T(x_n) + PT'(x_0)\, x_{n+1} - PT'(x_0)\, x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где P — линейный проекционный оператор ($P^2 = P$), проектирующий пространство E на его подпространство E_p. Таким образом, в отличие от алгоритмов (2) и (3), для осуществления которых требуется существование соответственно производных $T'(x_n)$ и $T'(x_0)$, в случае алгоритмов (4) и (5) предполагается существование только производных $PT'(x_n)$ и $PT'(x_0)$.

Нетрудно заметить также, что решение уравнений (4) и (5) сводится к решению некоторых операторных уравнений в пространстве E_p и, если E_p— конечномерное пространство размерности $\bar{N}$, решение уравнений (4) и (5) на каждом шаге сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений порядка не выше $\bar{N}$, что в случае, если $\bar{N}$ не слишком большое, представляет собой сравнительно простую задачу.

Методы (4) и (5) рассматривались авторами работы [1] в предположении, что первая производная Фреше оператора $PT(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\| PT'(x) - PT'(y) \| \leqslant K \| x - y \|. \tag{6}$$

2. В данной работе методы (4) и (5) изучаются для более широкого, чем в [1], класса уравнений (1): вместо предположения (6) здесь налагается требование, чтобы первая производная $PT'(x)$ удовлетворяла условию Гельдера

$$\| PT'(x) - PT'(y) \| \leqslant M \| x - y \|^{\alpha}, \tag{7}$$

где M и α — постоянные, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *элемент x_0 приближенно удовлетворяет уравнению* (1)

$$\| x_0 - T(x_0) \| \leqslant \eta; \tag{8}$$

2) *для оператора $I - PT'(x)$ существует обратный оператор $\Gamma_x = [I - PT'(x)]^{-1}$ в каждой точке шара S:*

$$\| x - x_0 \| \leqslant HB_0\eta, \tag{9}$$

где $H = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} J_k$, $J_1 = \frac{h}{1+\alpha} + p$, $J_k = \frac{h}{1+\alpha} \prod_{i=1}^{k-1} J_i^{\alpha} + p$, $k = 2, 3, \ldots$, *и известны оценки*

$$\| \Gamma_x \| \leqslant B, \quad \| \Gamma_{x_0} \| \leqslant B_0; \tag{10}$$

3) *в шаре S имеет место неравенство* (7) *и*

$$\| QT(x) - QT(y) \| \leqslant q \| x - y \|; \tag{11}$$

4) *выполняется соотношение*

$$h = BMB_0^{\alpha}\eta^{\alpha} < (1 + \alpha)(1 - p), \tag{12}$$

где $p = Bq < 1$.

Тогда в шаре S уравнение (1) *имеет решение x^*, к которому сходится процесс* (4), *начиная с x_0, при этом справедлива оценка погрешности*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant HB_0\eta \prod_{i=1}^{n} J_i. \tag{13}$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 работы [1].

3. Дополнительные свойства, которыми обладают некоторые специальные виды пространств, позволяют получить менее ограничительные условия сходимости и более точную оценку погрешности.

Рассмотрим, например, случай, когда E — гильбертово пространство, а P — оператор ортогонального проектирования. Тогда для произвольных $x, y \in E$

$$\| Px + Qy \|^2 = \| Px \|^2 + \| Qy \|^2. \tag{14}$$

Это тождество используется при доказательстве следующих теорем.

Т е о р е м а 2. *При условиях* (7), (8), (10), (11) *и*

$$h < (1+\alpha)\sqrt{1-p^2}, \quad p = Bq < 1 \tag{15}$$

в шаре $S' : \| x - x_0 \| \leqslant H'B_0\eta$ *уравнение* (1) *имеет решение* x^*, *к которому сходится процесс* (4), *при этом быстрота сходимости характеризуется неравенством* $\| x_n - x^* \| \leqslant H'B_0\eta \prod_{i=1}^{n} J'_i$, *где*

$$H' = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} J'_i, \quad J'_1 = \sqrt{\frac{h^2}{(1+\alpha)^2} + p^2},$$

$$J'_i = \sqrt{\frac{h^2}{(1+\alpha)^2} \prod_{k=1}^{i-1} J_k'^{2\alpha} + p^2}. \tag{16}$$

Оценка (16) точнее, чем соответствующая оценка (13), а условие (15) — менее ограничительное, чем (12).

Укажем также еще на один более жесткий, но легче проверяемый признак сходимости в случае гильбертова пространства E и оператора ортогонального проектирования.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия:*

1) *в некотором шаре* $S \subset E$ *норма оператора* $\|PT'(x)\| \leqslant l < 1$;

2) *все* x_n, *определяемые* (4), *принадлежат* S;

3) *выполняются неравенства* (7), (11) *и* $l^2 + q^2 < 1$, $\| \delta_1 \| < \left\{ \frac{(1+\alpha)[\sqrt{1-q^2} - l]}{M} \right\}^{1/\alpha}$.

Тогда процесс (4) *сходится к решению* $x^* \in S$ *уравнения* (1) *и имеет место оценка погрешности* $\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{1}{1 - J''_{n+1}} \prod_{i=1}^{n} J''_i \| \delta_1 \|$, *где*

$$J''_1 = \frac{Ml \| \delta_1 \|^{\alpha} + \sqrt{M^2 \| \delta_1 \|^{2\alpha} + (1+\alpha)^2 (1-l^2) q^2}}{(1+\alpha)(1-l^2)},$$

$$J''_i = \frac{Ml J_1''^{\alpha} \ldots J_{i-1}''^{\alpha} \| \delta_1 \|^{\alpha} + \sqrt{M^2 J_1''^{2\alpha} \ldots J_{i-1}''^{2\alpha} + (1+\alpha^2)(1-l^2) q^2}}{(1+\alpha)(1-l^2)}.$$

4. Приведем некоторые достаточные признаки сходимости и оценку погрешности алгоритма (5).

Л е м м а. *Если* $PT(x)$ — *дифференцируемая (по Фреше) операция из* E *в* E *и для* $PT'(x)$ *выполняется ослабленное условие Гельдера* (7) *с фиксированным элементом* $y \equiv x_0$, *то*

$$\| PT(x_0 + \Delta x) - PT(x_0) - PT'(x_0)\Delta x \| \leqslant \frac{M}{1+\alpha} \| \Delta x \|^{1+\alpha}. \tag{17}$$

При этом достаточно выполнения (7) *на отрезке* $x_t = x_0 + t\Delta x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Лемма следует из тождества

$$PT(x_0 + \Delta x) - PT(x_0) - PT'(x_0)\Delta x = \int_0^1 [PT'(x_t) - PT'(x_0)] \Delta x dt$$

(об интегрировании в абстрактных пространствах см., например, [2]).

Теорема 4. *Пусть для уравнения* (1) *выполняются условия:*

1) *в начальной точке* x_0 *линейная операция* $I - PT'(x_0)$ *имеет обратную* $\Gamma_{x_0} = [I - PT'(x_0)]^{-1}$ *и известны оценки*

$$\| \Gamma_{x_0} \| \leqslant B_0; \qquad \| \Gamma_{x_0}(x_0 - T(x_0)) \| \leqslant \eta;$$

2) *для* $PT'(x)$ *выполняется условие Гельдера* (7) *с фиксированным элементом* $y = x_0$ *и при любом* x *из области*

$$\| x - x_0 \| \leqslant N\eta_0, \tag{18}$$

где $1 < N < \dfrac{1+\alpha}{\alpha(1 - B_0 q)}$;

3) *в сфере* (18) *имеет место неравенство*

$$\| QT(x) - QT(y) \| \leqslant q \| x - y \|; \tag{19}$$

4) *постоянные* B, η, M, α, q *и* N *в условиях* 1) — 3) *такие, что*

$$B_0 M \eta_0^{\alpha} \equiv h_0 \leqslant (1+\alpha) \frac{N(1 - B_0 q) - 1}{N^{1+\alpha}} = \varphi(N), \quad B_0 q < 1. \tag{20}$$

Тогда в сфере (18) *уравнение* (1) *имеет единственное решение* x^*, *к которому сходятся приближения* (5) *модифицированного метода, причем*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{c^n}{1 - c} \eta_0, \qquad c = h_0 N^{\alpha} + B_0 q < 1. \tag{21}$$

Если же в неравенстве (18) $N \geqslant \dfrac{1+\alpha}{\alpha(1 - B_0 q)}$, *то решение* x^* *существует и единственно в сфере*

$$\| x - x_0 \| \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha(1 - B_0 q)} \eta_0 \tag{22}$$

при условии что B_0, η_0, M, α, q и N *удовлетворяют неравенству*

$$B_0 M \eta_0^{\alpha} \equiv h_0 < \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{\alpha} (1 - B_0 q)^{1+\alpha}. \tag{23}$$

В самой сфере (18) *единственность решения в этом случае может нарушаться.*

Замечание. Функция $\varphi(N)$ в (20) достигает максимума как раз при $N = \dfrac{1+\alpha}{\alpha(1 - B_0 q)}$, и максимальное значение $\varphi(N)$ равно $\left(\dfrac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{\alpha} (1 - B_0 q)^{1+\alpha}$ (ср. с (23)). При заданном h_0 наименьшее возможное значение N в (18), при котором выполняется (20), очевидно, найдется, если в (20) поставить знак равенства, т. е. это $N = N(h_0)$ определится из уравнения $\dfrac{h_0}{1+\alpha} N^{1+\alpha} - (1 - B_0 q) N + 1 = 0$. При этом $h_0 \leqslant \max \varphi(N) = \left(\dfrac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{\alpha} (1 - B_0 q)^{1+\alpha}$.

Таким образом, теорема 4 может быть дана в другом виде, отличающемся от приведенной выше формы следующим: в условии 2) вместо (18) стоит сфера $\|x - x_0\| \leqslant N(h_0)\eta_0$, и в условии 4) h_0 удовлетворяет неравенству (23) вместо (21): $h_0 < \left(\dfrac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{\alpha} (1 - B_0 q)^{1+\alpha}$.

5. Рассмотрим метод (5) в случае, когда E — гильбертово пространство, а P — оператор ортогонального проектирования.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть для уравнения* (1) *выполняются следующие условия:*

1) *в начальной точке* x_0 *операция* $I - PT'(x_0)$ *имеет обратную* $\Gamma_{x_0} = [I - PT'(x_0)]^{-1}$ *и известны оценки* $\|\Gamma_{x_0}\| \leqslant B_0$; $\|\Gamma_{x_0}(x_0 - T(x_0))\| \leqslant \eta_0$;

2) *для* $PT'(x_0)$ *выполняется условие Гельдера* (7) *с фиксированным элементом* $y \equiv x_0$ *и при любом* x *из области*

$$\|x - x_0\| \leqslant N\eta_0, \tag{24}$$

где $1 < N < \beta$, $\beta = \dfrac{(1+\alpha)[1+\alpha+\sqrt{(1+\alpha)^2+\beta}}{(\alpha^2+2\alpha)(1-B_0^2q^2)}$, $B_0q < 1$;

3) *в сфере* (24) *имеет место неравенство* $\|QT(x) - QT(y)\| \leqslant \leqslant q\|x - y\|$;

4) *постоянные* B_0, η_0, α, M, q *и* N *в условиях* 1) — 3) *такие, что*

$$B_0M\eta_0^\alpha = h_0 \leqslant (1+\alpha)\frac{\sqrt{(N-1)^2 - B_0^2q^2N^2}}{N^{1+\alpha}}. \tag{25}$$

Тогда уравнение (1) *в сфере* (24) *имеет единственное решение* x^*, *к которому сходятся приближения модифицированного метода, причем имеет место следующая оценка последовательных приближений:*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{c_1^n}{1-c_1}\eta_0, \qquad c_1 = \sqrt{h_0^2N^{2\alpha} + B_0^2q^2}. \tag{26}$$

Если же в неравенстве (24) $N \geqslant \beta$, *то решение* x^* *существует и единственно в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant \beta\eta_0$ *при условии, что* B_0, η_0, α, M, q *и* N *удовлетворяют неравенству*

$$B_0M\eta_0^\alpha \equiv h_0 < (1+\alpha)\frac{\sqrt{(\beta-1)^2 - B_0^2q^2\beta^2}}{\beta^{1+\alpha}}.$$

В самой сфере (24) *единственность решения в этом случае может нарушаться.*

При доказательстве этой теоремы используется тождество (14). Оценка (26) более точная, чем оценка (21), а условие (25) менее ограничительное, чем (20).

6. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 \Phi(t, s, x(s))\, ds. \tag{27}$$

Для решения этого уравнения применим алгоритм (4). В данном случае для $PT'(x)$ имеем

$$PT'(x)\, y = \int_0^1 \overline{\Phi}'_x(t, s, x(s))\, y(s)\, ds,$$

где $\overline{\Phi}(t, s, x(s)) = \sum_{i=1}^{m} A_i(t) B_i(s, x(s))$ — вырожденное ядро, аппроксимирующее функцию $\Phi(t, s, x)$, например отрезок ряда Тейлора или ряда Фурье функции $\Phi(t, s, x)$, если ее рассматривать как функцию от t.

Алгоритм (4) в данном случае примет вид

$$x_{n+1}(t) = \int_0^1 \Phi(t, s, x_n(s))\, ds + \int_0^1 \overline{\Phi}'_x(t, s, x_n(s))(x_{n+1}(s) - x_n(s))\, ds. \tag{28}$$

Введем обозначение: $\varepsilon_n(t)=\int\limits_0^1 \Phi(t,s,x_n(s))\,ds-\int\limits_0^1 \overline{\Phi}'_x(t,s,x_n(s))\,x_n(s)ds$. Тогда алгоритм (28) примет вид

$$x_{n+1}(t)=\varepsilon_n(t)+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^1 B'_i(s,x_n(s))\,x_{n+1}(s)\,ds. \tag{29}$$

Решая уравнение (29), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\overline{\beta}_i^{(n+1)}-\sum_{j=1}^{m}\overline{\alpha}_{ij}^{(n)}\overline{\beta}_j^{(n+1)}=\int\limits_0^1 B'_i(s,x_n(s))\,\varepsilon_n(s)\,ds, \tag{30}$$

где $\overline{\beta}_i^{(n+1)}=\int\limits_0^1 B'_i(s,x_n(s))\,x_{n+1}(s)\,ds$, $\overline{\alpha}_{ji}^{(n)}=\int\limits_0^1 B'_i(s,x_n(s))\,A_j(s)\,ds$. Если детерминант $D(x_n)$ системы (30) не равен нулю, то

$$\overline{\beta}_i^{(n+1)}=\frac{1}{D(x_n)}\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{m}D_{ki}(x_n)\,B'_k(s,x_n(s))\,\varepsilon_n(s)\,ds$$

и

$$x_{n+1}(t)=\varepsilon_n(t)+\int\limits_0^1\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{A_i(t)\,D_{ki}(x_n)\,B'_k(s,x_n(s))}{D(x_n)}\,\varepsilon_n(s)\,ds,$$

где $D_{ki}(x_n)$ — алгебраическое дополнение элемента, находящегося на пересечении i-й строки и k-го столбца детерминанта $D(x_n)$.

Пусть функции $\overline{\Phi}'_x(t,s,x)$, $Q(t,s,x)$ и $L(t,s,x)$, где $Q(t,s,x)=\Phi(t,s,x)-\overline{\Phi}(t,s,x)$, $L(t,s,x)=\frac{1}{D(x)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}A_i(x)\,D_{ki}(x)\,B'_k(s,x)$ в рассматриваемой области удовлетворяют условиям

$$|\overline{\Phi}'_x(t,s,x)-\overline{\Phi}'_x(t,s,y)|\leqslant k(t,s)\,|x-y|^{\alpha}\quad(\alpha\in(0,1]),$$
$$|Q(t,s,x)-Q(t,s,y)|\leqslant q(t,s)\,|x-y|,$$
$$|L(t,s,x)|\leqslant r(t,s),\quad |\overline{\Phi}'_x(t,s,x)|\leqslant b(t,s).$$

Если в качестве пространства E взять пространство $L_2[0,1]$ интегрируемых с квадратом функций, то для данных констант q, M, B получим следующие оценки:

$$q\leqslant\sqrt{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 q^2(t,s)\,dsds},\qquad M\leqslant\sqrt{\int\limits_0^1\overline{k}^2(t)\,ds},\qquad \overline{k}(t)\geqslant k(t,s),$$

$$B\leqslant 1+\sqrt{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 r^2(t,s)\,dsds},\qquad l\leqslant\sqrt{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 b^2(t,s)\,dsds}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Курпель Н. С., Мигович Ф. М. О некоторых обобщениях метода Ньютона—Канторовича. — УМЖ, 1969, 21, № 5, с. 594—609.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965. 519 с.

3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959. 684 с.
4. Вертгейм Б. А. Об условиях применения метода Ньютона.— ДАН СССР, 1956, **110**, № 5, с. 719—722.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 17.XI. 1975 г.,
после переработки — 15.XII. 1976 г.