УДК 517.53

*Г. Г. Цегелик*

# Свойства мажоранты и диаграммы Ньютона функции, аналитической в круге

Пусть функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (1)$$

— аналитическая в единичном круге $|z| < 1$.

Обозначим через $E$ множество индексов $n$, для которых $a_n \neq 0$. В плоскости $\xi\eta$ построим точки $P_n$ с координатами $\xi = n$, $\eta = -\ln |a_n|$, $n \in E$, и обозначим через $\bar{Q}_f$ выпуклую оболочку множества точек $P_n$, $n \in E$.

Положим $\varkappa(\xi) = \inf\limits_{(\xi,\eta)\in\bar{Q}_f} \eta$. Линия, описываемая в плоскости $\xi\eta$ уравнением $\eta = \varkappa(\xi)$, $\xi \geqslant n_0 = \inf\limits_{n\in E} n$, называется диаграммой Ньютона [1, 2] функции (1) и обозначается через $\mathfrak{B}_f$. Очевидно, что $\mathfrak{B}_f$ — выпуклая вниз ломаная линия.

Если положить $T_n = \exp[-\varkappa(n)]$, то $\mathfrak{M}_f(z) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} T_n z^n$ — мажоранта Ньютона функции (1).

В [3] установлены свойства мажоранты и диаграммы Ньютона целых функций одной и двух комплексных переменных. Аналогичные свойства мажоранты и диаграммы Ньютона функций, аналитических в круге, устанавливаются в этой заметке.

Из построения диаграммы Ньютона для $f(z)$ следует, что $\mathfrak{B}_f$ может состоять из конечного числа отрезков и луча или из бесконечного числа отрезков конечной длины. Например, диаграмма Ньютона $\mathfrak{B}_f$ функции $f(z) = \frac{1}{e} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ состоит из одного отрезка и луча, а диаграмма Ньютона $\mathfrak{B}_f$ функции $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}} z^n$ — из бесконечного числа отрезков конечной длины.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует подпоследовательность индексов $\{n_i\}$ такая, что подпоследовательность $\{|a_{n_i}|\}$ неограничена, то диаграмма Ньютона $\mathfrak{B}_f$ функции* (1) *состоит из отрезков конечной длины.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существует подпоследовательность индексов $\{n_i\}$, для которой подпоследовательность $\{|a_{n_i}|\}$ неограничена, а $\mathfrak{B}_f$ обладает лучом. Тогда, поскольку радиус сходимости ряда (1) — единица, угловой коэффициент луча [1, 2] $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. луч должен быть параллельным оси абсцисс. Отсюда следует, что существует прямая $y = b$ $(b > -\infty)$ такая, для которой все точки $P_n$, $n \in E$, будут лежать на прямой или выше ее. Таким образом, $-\ln|a_n| \geqslant b$ или $|a_n| \leqslant e^{-b} < \infty$ для всех $n \in E$, что противоречит условию теоремы. Значит, сделанное предположение неверно и теорема доказана.

Для порядка роста $\rho$ и типа $\sigma$ функции (1) имеют место формулы [4]:

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n}, \quad \sigma = \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{\rho+1}} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{(\ln^+|a_n|)^{\rho+1}}{n^\rho}.$$

Пусть $f(z)$ — функция конечного порядка $\rho$ и типа $\sigma$.

Теорема 2. *Функции $f(z)$ и $\mathfrak{M}_f(z)$ имеют одинаковые порядок и тип.*

Доказательство. Пусть $\rho'$ — порядок роста $\mathfrak{M}_f(z)$. Чтобы показать совпадение порядков $f(z)$ и $\mathfrak{M}_f(z)$, достаточно доказать, что $A = A'$, где

$$A = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n}, \quad A' = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+ T_n}{\ln n}.$$

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Для всех $n \in E$ $|a_n| \leqslant K < \infty$. В этом случае коэффициенты $\mathfrak{M}_f(z)$ ограничены и $A = A' = 0$.

2. Существует подпоследовательность индексов $\{n_i\}$ такая, что подпоследовательность $\{|a_{n_i}|\}$ неограничена. Тогда на основании теоремы 1 диаграмма Ньютона функции $f(z)$ будет состоять из отрезков конечной длины и содержать бесконечное множество вершинных индексов $m_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, причем

$$\lim_{j\to\infty} [-\varkappa(m_{j+1}) + \varkappa(m_j)] = 0,$$

где $m_j$ и $m_{j+1}$ — два последовательных вершинных индекса.

Поскольку $|a_n| \leqslant T_n$ для всех $n = 0, 1, \ldots,$ то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+ T_n}{\ln n}$$

или

$$A \leqslant A'. \tag{2}$$

Из соотношения $-\ln T_{n+1} + \ln T_n = \operatorname{tg} \varphi_n$, где $\operatorname{tg} \varphi_n$ — угловой коэффициент отрезка диаграммы Ньютона, на котором лежат точки с координатами $(n, -\ln T_n)$ и $(n+1, -\ln T_{n+1})$, получаем равенство

$$\frac{\ln \ln T_{n+1}}{\ln (n+1)} - \frac{\ln \ln T_n}{\ln (n+1)} = \frac{\ln (1+\delta_n)}{\ln (n+1)}, \tag{3}$$

где $\delta_n = -\dfrac{\operatorname{tg} \varphi_n}{\ln T_n}$.

Поскольку $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то для каждого положительного числа $\varepsilon$, сколь бы мало оно ни было, существует такой номер $N$, что при $n > N$

$$\left| \frac{\ln \ln T_{n+1}}{\ln (n+1)} - \frac{\ln \ln T_n}{\ln n} \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$A' = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ T_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln T_n}{\ln n} = \lim_{j\to\infty} \frac{\ln \ln T_{m_j}}{\ln m_j} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{\ln \ln |a_{m_j}|}{\ln m_j} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln n} = A$$

или

$$A' \leqslant A. \tag{4}$$

Неравенства (2) и (4) доказывают совпадение порядков роста функций $f(z)$ и $\mathfrak{M}_f(z)$.

Аналогично можно показать, что и типы $f(z)$ и $\mathfrak{M}_f(z)$ совпадают.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ostrowski A. Recherches sur la Méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent.— Acta Math., 1940, **72**, p. 99—257.
2. Костовский А. Н. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львовск. ун-та, 1967. 208 с.
3. Кардаш А. І., Чулик І. І. Властивості мажоранти та діаграми Ньютона цілих функцій двох комплексних змінних.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 7, с. 583—586.
4. Говоров Н. В. О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения. Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1959, **100**, с. 101—115.



Львовский
государственный университет



Поступила в редакцию
29.XII. 1975 г.