УДК 519.21

М. Т. Дивнич

Про граничну поведінку розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, що збурюється випадковим процесом типу «білого шуму»

У цій замітці розглядається задача Коші для рівняння теплопровідності

$$-u_t'(t, x) + \frac{a^2}{2} u_{xx}''(t, x) = f(x)\,\dot{w}(t), \tag{1}$$

де $t \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$, $u(0, x) = g(x)$, $\dot{w}(t)$ — випадковий процес, для якого $\int\limits_{t_1}^{t_2} \dot{w}(t)\,dt = w(t_2) - w(t_1)$ при довільних $t_1 < t_2$, де $w(t)$ — вінерівський процес, $f(x)$, $g(x)$ — невипадкові функції. Виписується явний вигляд розв'язку і досліджується гранична поведінка розподілу розв'язку $u(t, x)$ при $t \to \infty$ і при $|x| \to \infty$.

Гранична поведінка розв'язку задачі Коші для параболічних рівнянь без випадковостей розглядалась в роботах багатьох авторів. Відзначимо тільки роботи [1, 2], які мають досить велику бібліографію.

Рівняння виду (1) при $0 < x < e$ розглядається в роботі [3], де досліджується питання про нормальність розподілу розв'язку, а також в роботі [4], де досліджується питання про єдиність і гладкість розв'язку для більш загальних рівнянь. Доведемо допоміжне твердження.

Лема. *Нехай маємо стохастичний інтеграл Іто* [5] $\eta(t) = \int\limits_0^t f(t,s) \times dw(s)$, *де* $w(s)$ — *вінерівський процес* $f(t, s)$, $f_t'(t, s)$ — *невипадкові неперервні по обох змінних функції. Тоді випадковий процес* $\eta(t)$ *має сто-*

хастичний диференціал виду

$$d\eta(t) = f(t, t)\,dw(t) + \int_0^t f'_t(t, s)\,dw(s)\,dt.$$

Доведення. Візьмемо дві довільні точки $t' < t''$ і розіб'ємо відрізок $[t', t'']$: $t' = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t''$. Тоді

$$\eta(t'') - \eta(t') = \sum_{k=0}^{n-1} [\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_0^{t_{k+1}} f(t_{k+1}, s)\,dw(s) - \int_0^{t_k} f(t_k, s)\,dw(s) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, s)\,dw(s) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t_{k+1}, s) - f(s, s)]\,dw(s) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t [f(t_{k+1}, s) - f(t_k, s)]\,dw(s) \right\} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2}$$

Легко бачити, що

$$I_1 = \int_{t'}^{t''} f(s, s)\,dw(s); \tag{3}$$

$$M\,|\,I_2\,|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t_{k+1}, s) - f(s, s)]^2\,ds \to 0 \tag{4}$$

при $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$, де $\Delta t_k = [t_{k+1} - t_k]$,

$$\mathrm{M}\left| I_3 - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k} f'_t(t_k, s)\,dw(s)\,\Delta t_k \right|^2 = M\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k} [f'_t(t_k + \theta\Delta t_k, s) - \right.$$

$$\left. - f'_t(t_k, s)]\,dw(s)\,\Delta t_k \right|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M\alpha_k^2 + \sum_{k,i} M\alpha_k\alpha_i,$$

де $\alpha_k = \int\limits_0^{t_k} [f'_t(t_k + \theta\Delta t_k, s) - f'_t(t_k, s)]\,dw(s)\,\Delta t_k$. Згідно з властивостями стохастичного інтеграла Іто [5] і неперервності функції $f'_t(t, s)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} M\alpha_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta t_k)^2 \int_0^{t_k} [f'_t(t_k + \theta\Delta t_k, s) - f'_t(t, s)]^2\,ds \to 0$$

при $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$,

$$\sum_{k,i} M\alpha_k\alpha_i = 2\sum_{k<i} M\alpha_k\alpha_i = 2\sum_{k<i} M\alpha_k^2 =$$

$$= 2\sum_{k<i} (\Delta t_k)^2 \int_0^t [f'_t(t_k + \theta\Delta t_k, s) - f'_t(t_k, s)]^2\,ds \to 0$$

при $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$. Отже,

$$I_3 - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k} f'_t(t_k, s)\,dw(s)\,\Delta t_k \to 0 \tag{5}$$

за імовірністю при $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$. Через те що

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{t_k} f_t'(t_k, s)\, dw(s)\, \Delta t_k \to \int_{t'}^{t''} \int_0^t f_t'(t, s)\, dw(s)\, dt$$

за імовірністю при $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$, то із співвідношень (2) — (5) випливає доведення леми.

Теорема 1. *Нехай $g(x)$, $f(x)$ — неперервні обмежені функції. Тоді існує розв'язок задачі Коші рівняння* (1) *і має такий вигляд:*

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t, x, y)\, g(y)\, dy - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} z(t - s, x, y)\, f(y)\, dy dw(s),$$

де

$$z(t - s, x, y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi(t - s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2a^2(t-s)}}.$$

Доведення. Помножимо обидві частини рівняння (1) на dt і одержимо

$$-d_t u(t, x) + \frac{a^2}{2} u_{xx}''(t, x)\, dt = f(x)\, dw(t). \tag{6}$$

Через те що функція

$$v(x, t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t - s, x, y)\, f(y)\, dy$$

при кожному x неперервна щодо t і s, а також неперервна її похідна $v_t'(x, t, s)$, то на основі леми одержимо, що

$$d_t u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} z_t'(t, x, y)\, f(y)\, dy dt -$$

$$- \int_0^t v_t'(x, t, s)\, dw(s)\, dt - f(x)\, dw(t). \tag{7}$$

З іншого боку,

$$\frac{a^2}{2} u_{xx}''(t, x)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} z_{xx}''(t, x, y)\, f(y)\, dy dt -$$

$$- \int_0^t \frac{a^2}{2} v_{xx}''(x, t, s)\, dw(s)\, dt. \tag{8}$$

Оскільки

$$-z_t'(t, x, y) + \frac{a^2}{2} z_{xx}''(t, x, y) = 0;$$

$$-v_t'(x, t, s) + \frac{a^2}{2} v_{xx}''(x, t, s) = 0,$$

то підставивши співвідношення (7), (8) в (6), одержимо доведення теореми.

Теорема 2. *Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ неперервні, обмежені і $|f(x) - \sigma(x)| \to 0$ при $|x| \to \infty$, де*

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, & x > 0, \\ \sigma_2, & x < 0. \end{cases}$$

Тоді розподіл випадкової величини $\frac{u(t,x)}{\sqrt{t}}$, *де* $u(t,x)$ — *розв'язок задачі Коші рівняння* (1), *при* $t \to \infty$ *збігається до нормального розподілу з параметрами* $\left(0, \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2}{4}\right)$.

Доведення. Легко бачити, що

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} z(t,x,y)\,g(y)\,dy\right| \leqslant c\,\frac{1}{t} \to 0 \tag{9}$$

при $t \to \infty$. Введемо параметр T і одержимо

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{tT}\int_{-\infty}^{\infty} z(tT-s,x,y)\,f)y)\,dw(s) =$$

$$=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} z((t-s)T,x,y)\,f(y)\,dy\,dw_T(s), \tag{10}$$

де $w_T(t) = \frac{w(sT)}{\sqrt{T}}$. Оскільки

$$M\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} z((t-s)T,x,y)\,f(y)\,dy\,dw_T(s) - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\,w_T(t)\right]^2 =$$

$$=\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{\infty} z((t-s)T,x,y)\,f(y)\,dy - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right]^2 ds =$$

$$=\int_0^t\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f(x+\sqrt{2}a(t-s)\sqrt{T}z)\,dz - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right]^2 ds =$$

$$=\int_0^t\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-z^2} f(x+\sqrt{2}a(t-s)\sqrt{T}z) - \sigma(z)]\,dz\right] ds \to 0$$

при $T \to \infty$, то, враховуючи співвідношення (9) і (10), маємо

$$\frac{u(tT,x)}{\sqrt{T}} - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\cdot\frac{w(tT)}{\sqrt{T}} \to 0$$

за імовірністю при $T \to \infty$. З того що випадкова величина $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} \times \times \frac{w(tT)}{\sqrt{T}}$ при кожному T має нормальний розподіл з параметрами $\left(0, \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2\right)$, випливає доведення теореми.

Теорема 3. *Нехай функції в теоремі* 1 *такі, що* $f(x) \to b$, $g(x) \to c$ *при* $|x| \to \infty$. *Тоді розподіл розв'язку задачі Коші* $u(t,x)$ *при* $|x| \to \infty$ *збігається до нормального розподілу з параметрами* (c, b^2).

Доведення. Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t, x, y) g(y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} g(x + \sqrt{2}atz) dz \to c;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t - s, x, y) f(y) dy \to b$$

при $|x| \to \infty$ то $u(t, x) \to c + bw(t)$ за імовірністю при $|x| \to \infty$. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ильин А. С., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа.— УМН, 1962, **17**, № 3, с. 3—146.
2. Хосьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, № 2, с. 196—214.
3. Вахания Н. Н. Об одной вероятностной задаче для одномерного уравнения теплопроводности.— Теория вероятностей и ее применения, 1967, **12**, № 4, с. 727—729.
4. Розовский Б. Л. О стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных.— Междунар. конфер. теории вероят. и мат. статистики. Тезисы докл., Вильнюс, 1973, **2**, с. 185—188.
5. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наук. думка», 1968. 353 с.

Виробничо-технічне об'єднання ВУМ

Надійшла до редакції
30.V 1975 р.