УДК 512.8

П. С. Казімірський

Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники

У цій роботі виявляються деякі нові ситуації, при яких знайдені автором достатні умови розкладності регулярного матричного многочлена на лінійні множники (див. [1, теорема 3]) будуть також і необхідними.

Нехай P—алгебраїчно замкнене поле нульової характеристики, $G(x)$— довільна прямокутна поліномна матриця будови $r \times s$ з елементами із $P[x]$ і $\varphi(x)$ — довільний унітальний (старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці) многочлен з коефіцієнтами із P. Запишемо $\varphi(x)$ у вигляді канонічного добутку лінійних множників

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_m)^{k_m},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — попарно різні.

Під похідною поліномної матриці $G(x) = \| g_{ij}(x) \|$, як звичайно, розуміємо матрицю $G'(x)$, елементами якої є похідні $g'_{ij}(x)$ всіх її елементів $g_{ij}(x)$. Похідні вищих порядків, як звичайно, позначаємо через $G''(x)$, $G'''(x), \dots, G^{(t)}(x)$.

Означення 1. Значенням поліномної матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)$ називаємо числову матрицю виду:

$$M_{G(x)}(\varphi) = \begin{Vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{Vmatrix}, \quad \text{де } H_i = \begin{Vmatrix} G(\alpha_i) \\ G'(\alpha_i) \\ \vdots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{Vmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Число рядків матриці $M_{G(x)}(\varphi)$ дорівнює $r \deg \varphi(x) = r(k_1 + k_2 + \dots + k_m)$. Число її стовпців збігається з s, тобто з числом стовпців матриці $G(x)$.

Твердження 1.

$$M_{G(x)L}(\varphi) = (M_{G(x)}(\varphi))\,L, \tag{1}$$

де L — довільна $s \times k$ матриця над P.

Твердження 2.

$$M_{G_1(x)+G_2(x)}(\varphi) = M_{G_1(x)}(\varphi) + M_{G_2(x)}(\varphi).$$

Доведення тверджень 1 і 2 випливає з означення матриці $M_{G(x)}(\varphi)$.

Твердження 3. *Якщо многочлени над P $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ взаємно прості, то*

$$M_{G(x)}(\varphi(x)\,\psi(x)) = \begin{Vmatrix} M_{G(x)}(\varphi) \\ M_{G(x)}(\psi) \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Доведення безпосередньо випливає з означення матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)\psi(x)$ і врахування порядку співмножників в добутку $\varphi(x)\psi(x)$.

Твердження 4. *Має місце рівність*

$$\operatorname{rang} M_{G(x)\varphi(x)}(\varphi(x)\,\psi(x)) = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\psi(x)). \tag{3}$$

Доведення. Нехай

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_m)^{k_m},$$

$$\psi(x) = (x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\dots(x-\alpha_m)^{l_m}\psi_l(x), \quad l_i \geqslant 0. \tag{4}$$

Застосувавши до добутку $G(x)\varphi(x)$ формулу Лейбніца, одержимо

$$[G(\alpha_i)\,\varphi(\alpha_i)]^{(j)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, k_i - 1, \tag{5}$$

де $[G(\alpha_i)\,\varphi(\alpha_i)]^{(j)}$ — значення j-ї похідної добутку $G(x)\varphi(x)$ при $x=\alpha_i$.

Якщо многочлени $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ взаємно прості, то на основі твердження 3, застосувавши співвідношення (2) і враховуючи рівність (5), одержимо

$$M_{G(x)\varphi(x)}(\varphi(x)\psi(x)) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ M_{G(x)}(\varphi) \end{matrix} \right\|,$$

що, як легко бачити, доводить в цьому випадку наше твердження.

Припустимо тепер, що многочлени $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ не взаємно прості. Нехай α — спільний корінь цих многочленів, тобто

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^k \varphi_1(x), \quad \varphi_1(\alpha) \neq 0, \quad k \geqslant 1,$$

$$\psi(x) = (x-\alpha)^l \psi_1(x), \quad \psi_1(\alpha) \neq 0, \quad l \geqslant 1.$$

Розглянемо матрицю $M_{G(x)\varphi(x)}[\alpha^{(k+l)}]$. Тому що зважаючи на співвідношення (5)

$$[G(\alpha)\varphi(\alpha)]^{(j)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

і

$$\left\| \begin{matrix} [G(\alpha)\varphi(\alpha)]^{(k)} \\ [G(\alpha)\varphi(\alpha)]^{(k+1)} \\ \vdots \\ [G(\alpha)\varphi(\alpha)]^{(k+l-1)} \end{matrix} \right\| = \Phi(\alpha) \left\| \begin{matrix} G(\alpha) \\ G'(\alpha) \\ \vdots \\ G^{(l-1)}(\alpha) \end{matrix} \right\|,$$

де

$$\Phi(\alpha) =$$
$$= \left\| \begin{matrix} \varphi^{(k)}(\alpha)E & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi^{(k+1)}(\alpha)E & \binom{k+1}{k}\varphi^{(k)}(\alpha)E & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi^{(k+2)}(\alpha)E & \binom{k+2}{k+1}\varphi^{(k+1)}(\alpha)E & \binom{k+2}{k}\varphi^{(k)}(\alpha)E & \ldots & 0 \\ \varphi^{(k+l-1)}(\alpha)E & \binom{k+l-1}{k+l-2}\varphi^{(k+l-2)}(\alpha)E & \binom{k+l-1}{k+l-3}\varphi^{(k+l-3)}(\alpha)E & \ldots & \binom{k+l-1}{k}\varphi^{(k)}(\alpha)E \end{matrix} \right\|,$$

E — одинична матриця порядку s, матриця $\Phi(\alpha)$ має, очевидно, порядок $s \cdot l$, то

$$M_{G(x)\varphi(x)}[\alpha^{(k+l)}] = \left\| \begin{array}{cccc|c} E & & & & \\ & E & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & E & \\ \hline & 0 & & & \Phi(\alpha) \end{array} \right\| \left\| \begin{matrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} k \\ G(\alpha) \\ G'(\alpha) \\ \cdots\cdots \\ G^{(l-1)}(\alpha) \end{matrix} \right\|.$$

Тому що $\varphi^{(k)}(\alpha) \neq 0$, то лівий множник останнього співвідношення оборотна матриця над P і, отже,

$$\operatorname{rang} M_{G(x)\varphi(x)}[\alpha^{(k+l)}] = \operatorname{rang} M_{G(x)}[\alpha^{(l)}].$$

Аналогічно в загальному випадку, позначаючи через $F_{k_i+l_i}(\alpha_i)$ матрицю

$$F_{k_i+l_i}(\alpha_i) = \left\| \begin{array}{cccc|c} E & & & & \\ & E & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & E & \\ \hline & 0 & & & \Phi_{l_i}(\alpha_i) \end{array} \right\|,$$

де E — одинична матриця порядку s, $\Phi_{l_i}(\alpha_i)$ — матриця порядку $s \cdot l_i$ виду

$$\Phi_{l_i}(\alpha_i) =$$

$$= \begin{Vmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \binom{k_i+1}{k_i}\varphi^{(k_i)}(\alpha_i)E & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_3 & \binom{k_i+2}{k_i+1}\varphi^{(k_i+1)}(\alpha_i)E & \binom{k_i+2}{k_i}\varphi^{(k_i)}(\alpha_i)E & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_n & \binom{k_i+l_i-1}{k_i+l_i-2}\varphi^{(k_i+l_i-2)}(\alpha_i)E & \binom{k_i+l_i-1}{k_i+l_i-3}\varphi^{(k_i+l_i-3)}(\alpha_i)E & \dots & \binom{k_i+l_i-1}{k_i}\varphi^{(k_i)}(\alpha_i)E \end{Vmatrix},$$

де $\gamma_1 = \varphi^{(k_i)}(\alpha_i)E$, $\gamma_2 = \varphi^{(k_i+1)}(\alpha_i)E$, $\varphi_3 = \varphi^{(k_i+2)}(\alpha_i)E$, $\gamma_n = \varphi^{(k_i+l_i-1)}\alpha_i E$; $i = 1, 2, \dots, m$, одержимо, що

$$M_{G(x)\varphi(x)}(\varphi(x)\psi(x)) = \begin{Vmatrix} F_{k_1+l_1}(\alpha_1) & & & & \\ & F_{k_2+l_2}(\alpha_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & F_{k_m+l_m}(\alpha_m) & \\ & & & & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ M_{G(x)}[\alpha_1^{(l_1)}] \\ 0 \\ M_{G(x)}[\alpha_2^{(l_2)}] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \\ M_{G(x)}[\alpha_m^{(l_m)}] \\ M_{G(x)}(\psi_l) \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Тому що лівий множник у співвідношенні (6) — оборотна матриця, (матриця, E, яка стоїть в правому нижньому куті цієї матриці, — одинична матриця порядку, рівного числу рядків матриці $M_{G(x)}(\psi(x))$, то, зважаючи на твердження 3, із співвідношення (6) одержуємо рівність (3), що треба було довести.

Розглянемо унітальний матричний многочлен $A(x)$ виду

$$A(x) = Ex^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_{s-1}x + A_s, \tag{7}$$

A_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ — $n \times n$ — матриці над P.

Позначимо через $A_*(x)$ взаємну матрицю поліноміальної матриці $A(x)$, тобто матрицю, яка задовольняє співвідношення

$$A_*(x)A(x) = A(x)A_*(x) = E \det A(x).$$

Означення 2. Поліноміальні матриці виду

$$A_i(x) = A_*(x)\,\| E,\ Ex, \dots, Ex^i \|, \quad i = 1, 2, \dots$$

називатимемо супроводжуючими матрицями матричного многочлена $A(x)$.

Згідно з введеним означенням маємо $A_0(x) = A_*(x)$.

Многочлен $\det A(x)$ будемо називати характеристичним многочленом унітального матричного многочлена (7) і позначати через $\Delta(x)$. Для кожного дільника $\varphi(x)$ характеристичного многочлена $\Delta(x)$ через K_φ позначимо множину всіх коренів многочлена $\varphi(x)$ (без врахування кратності).

Через K_{n-1} позначимо множину тих коренів $\alpha \in K_\Delta$, для яких $\operatorname{rang} A(\alpha) = n - 1$.

Л е м а. *Нехай для характеристичного многочлена* $\Delta(x) = \det A(x)$ *унітального матричного многочлена* $A(x)$ *задано розклад*

$$\Delta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_s(x) \tag{8}$$

на унітальні співмножники, кожний із яких має степінь n, *причому для довільної пари різних індексів* i *та* j $(1 \leqslant i, j \leqslant s)$ *виконана умова*

$$K_{\varphi_i} \cap K_{\varphi_j} \subset K_{n-1}. \tag{9}$$

Якщо існує розклад

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\ldots(Ex - B_s), \tag{10}$$

для якого $\det(Ex - B_i) = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, *то для кожного* $r = 0, 1, \ldots$ $\ldots, s - 2$ *виконується рівність*

$$\operatorname{rang} M_{A_r(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) = n(r+1). \tag{11}$$

Д о в е д е н н я леми проведемо індукцією по степеню s. При $s = 1$ доведення очевидне. Якщо $s = 2$, то твердження леми, тобто справедливість рівності (11) при $r = 0$ міститься в наслідкові 1 теореми 3 (див. [2, с. 29]).

Нехай $s \geqslant 3$ і лема вже доведена для унітальних матричних многочленів степеня $s - 1$. Покладемо

$$\overline{A}(x) = (Ex - B_2)\ldots(Ex - B_s).$$

Якщо α — корінь $\varphi_i(x)$ і $\varphi_j(x)$ для $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$, $i \neq j$, то оскільки

$$\operatorname{rang} A(\alpha) = n - 1, \quad \det \overline{A}(\alpha) = 0 \text{ і } A(\alpha) = (E\alpha - B_1)\overline{A}(\alpha),$$

маємо $\operatorname{rang} \overline{A}(\alpha) = n - 1$. Значить, до матриці $\overline{A}(x)$ може бути застосоване індуктивне припущення, тобто

$$\operatorname{rang} M_{\overline{A}_*(x)}(\varphi_2(x)\ldots\varphi_{n+1}(x)) = nr \tag{12}$$

для всіх $r = 1, 2, \ldots, s - 2$.

Згідно з означенням супроводжуючих матриць $A_r(x)$ і матриці значень $M_{G(x)}(\varphi)$ (див. означення 1), маємо

$$M_{A_r(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) =$$

$$= \| M_{A_*(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)), \ldots, M_{A_*(x)x^r}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{r+1}(x)) \|. \tag{13}$$

Нас цікавить ранг цієї матриці.

Виконаємо в цій матриці елементарні перетворення: від кожної виписаної нами вертикальної смуги, починаючи з останньої, віднімемо попередню смугу, помножену на B_1. Перша смуга при цьому залишиться без зміни. В $i + 1$- й смузі після виконання вказаних перетворень буде стояти нова смуга, що дорівнюватиме

$$M_{A_*(x)x^i}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) - M_{A_*(x)x^{i-1}}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) \cdot B_1.$$

Згідно з твердженнями 1 і 2 це дорівнює $M_{A_*(x)x^{i-1}(Ex-B_1)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x))$. Але $A(x) = (Ex - B_1)\overline{A}(x)$, тому

$$A_*(x)x^{i-1}(Ex + B_1) = \overline{A}_*(x)x^{i-1}\varphi_1(x).$$

Цим для матриці, яка нас цікавить, одержано таке зображення:

$$M_{A_r(x)}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{r+1}(x)) =$$

$$= \| M_{A_*(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)), \; M_{\overline{A}_{r-1}(x)\varphi_1(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) \|.$$

У першій вертикальній смузі останньої матриці (яку подамо як таку, що складається із двох вертикальних смуг, розділених комою) міститься блок $M_{A_\bullet(x)}(\varphi_1)$. Всі рядки із другої смуги, які є продовженнями рядків із блока $M_{A_\bullet(x)}(\varphi_1)$, складаються виключно з нулів. Це значить, що ранг матриці (12) дорівнює

$$\operatorname{rang} M_{A_\bullet(x)}(\varphi_1) + \operatorname{rang} M_{\overline{A}_\bullet(x)\varphi_1(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)).$$

Перший доданок тут дорівнює n (див. [2, теорема 3, наслідок 1]). Другий доданок, згідно з твердженням 4 — $\operatorname{rang} M_{\overline{A}_{r-1}(x)}(\varphi_2(x)\ldots\varphi_{r+1}(x))$, тобто дорівнює nr (див. рівність (11)). Таким чином,

$$\operatorname{rang} M_{A_{r+1}(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) = n + nr = n(r+1).$$

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай для характеристичного многочлена* $\Delta(x) = \det A(x)$ *унітального матричного многочлена* $A(x)$ *задано розклад* (8) *на унітальні співмножники, кожний з яких має степінь* n, *причому для довільної пари різних індексів* i *і* j, $1 \leqslant i, j \leqslant s$ *виконується умова* (9). *Тоді для існування розкладу* (10), *для якого* $\det(Ex - B_i) = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, *необхідно і достатньо, щоб для кожного* $r = 0, 1, 2, \ldots, s-2$ *виконувалась рівність* (11).

Доведення випливає із останньої леми і теореми 3 із роботи [1].

При виконанні умови (9) має місце єдиність розкладу на лінійні множники, паралельного даному розкладові (14) для $\Delta(x)$. Докладніше цей факт означає таке.

Теорема 2. *Нехай для* $A(x)$ *виконані умови теореми* 1. *Якщо для* $A(x)$ *маємо розклади* (10) і

$$A(x) = (Ex - C_1)(Ex - C_2)\ldots(Ex - C_s),$$

паралельні разкладові (14) *для* $\Delta(x)$, *тобто такі що*

$$\det(Ex - B_i) = \det(Ex - C_i) = \varphi_i(x),$$

то $B_i = C_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Доведення легко провести індукцією по s, зважаючи на теорему 3 із [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. Казімірський П. С. Про розклад поліноміальної матриці на лінійні множники.— Вестник Львовского политехн. ин-та, № 8. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и алгебры, 1965, с. 53—60.
2. Казимирский П. С. Матричные многочлены и уравнения.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Вып. 2. К., «Наук. думка», 1975, с. 23—31.

Львівський філіал математичної фізики
Інституту математики АН УРСР

Надійшла до редакції
23.III. 1976 р.