УДК 517.946+517.929

В. В. Миронова

Неперервна залежність від параметра розв'язків деяких квазілінійних систем

У цій роботі досліджується неперервна залежність від параметра розв'язків нелінійної початково-граничної задачі

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(t, x, u(t, x), Y(t - \theta(\lambda)), \lambda), \tag{1}$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = H(t, u(t, x), Y(t - \theta(\lambda)), \lambda), \tag{2}$$

$$u(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x), \tag{3}$$

$$Y(t)|_{t \in B_0} = Y_0(t), \tag{4}$$

де $x \in \Omega$, Ω — обмежена область у просторі E_n з границею Γ; $Y(t)$ та $Y_0(t)$ — m-вимірні вектор-функції; $\theta(\lambda)$ — неперервна і невід'ємна для всіх $\lambda \in \Lambda$, де Λ — деяка числова множина, що має граничну точку λ_0; $B_0 = [-\max\limits_{\lambda \in \Lambda} \theta(\lambda), 0]$ — початкова множина підсистеми (2); $f(t, x, u, Y, \lambda)$ та $H(t, u, Y, \lambda)$ — нелінійні функціонали, скалярний та векторний відповідно; Δ — оператор Лапласа по x; $t \in [0, T]$, $T < \infty$.

Нехай нелінійні функціонали $f(t, x, u, Y, \lambda)$ та $H(t, u, Y, \lambda)$ задовольняють умови:

а) f і H — визначені, рівномірно обмежені деякою константою $p > 0$ в області $[0, T] \times \Omega \times D_0 \times D \times \Lambda$, де $D_0 = \{u, |u| < N\}$ та $D = \{Y, \|Y\|_{E_m} < N\}$ і задовольняють умови Ліпшіца по t, u і Y з константою $k > 0$ рівномірно щодо t, x, u, Y і λ, а $f(t, x, u, Y, \lambda)$ до того ж задовольняє умову Гельдера по x з показником $\alpha \in (0, 1)$ рівномірно щодо t, u, Y, λ;

б) при всіх $t \in [0, T]$, $x \in \Omega$ і фіксованих $u \in D_0$ та $Y \in D$ існують границі

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_t^{t+\beta} f(\tau, x, u, Y, \lambda)\, d\tau = \int_t^{t+\beta} f(\tau, x, u, Y, \lambda_0)\, d\tau, \tag{5}$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_t^{t+\beta} H(\tau, u, Y, \lambda)\, d\tau = \int_t^{t+\beta} H(\tau, u, Y, \lambda_0)\, d\tau, \tag{6}$$

$$0 \leqslant t < t + \beta \leqslant T;$$

Має місце така теорема.

Теорема 1. 1) *Нехай функціонали f та H задовольняють умови а) і б);* 2) *функції $\varphi(x)$ і $Y_0(t)$ неперервні і рівномірно обмежені константою $N_1 > 0$, причому $N_1 < N$;*

3) *розв'язок задачі* (1) — (4) *при $\lambda = \lambda_0$ лежить в $D_0 \times D$ разом з деяким ρ-околом, тобто $|u| < N_2 - \rho$, $\|Y\| < N_2 - \rho$, $N_1 < N_2 < N$.*

Тоді розв'язок задачі (1) — (4) *неперервно залежить від параметра λ, тобто для будь-якого $\sigma > 0$ існує такий окіл $U(\lambda_0)$ точки λ_0, що для всіх $\lambda \in U(\lambda_0)$ розв'язок $\{u(t, x, \lambda), Y(t, \lambda)\}$ задачі* (1) — (4) *визначений для всіх $t \in [0, T]$, $x \in \Omega$ і задовольняє нерівностям*

$$|u(t, x, \lambda) - u(t, x, \lambda_0)| < \sigma, \quad \|Y(t, \lambda) - Y(t, \lambda_0)\|_{E_m} < \sigma. \tag{7}$$

Доведення. В силу умов теореми існує такий окіл $U_1(\lambda_0)$, що для всіх $\lambda \in U_1(\lambda_0)$ задача (1) — (4) має єдиний розв'язок $\{u(t, x, \lambda), Y(t, \lambda)\}$ (див. [1]), який визначений на деякому інтервалі часу $[0, t_1]$, де $t_1 \leqslant T$ і задовольняє систему інтегральних рівнянь

$$u(t, x, \lambda) = \int_\Omega G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_\Omega G(x, \xi, t - \tau) \times$$

$$\times f(\tau, \xi, u(\tau, \xi, \lambda), Y(\tau - \theta(\lambda), \lambda), \lambda)\, d\xi, \tag{8}$$

$$Y(t, \lambda) = Y_0(0) + \int_0^t H(\tau, u(\tau, x, \lambda), Y(\tau - \theta(\lambda), \lambda), \lambda)\, d\tau, \quad t \geqslant 0, \tag{9}$$

$$Y(t, \lambda) = Y_0(t), \quad t \in B_0,$$

де $G(x, \xi, t)$ — функція Гріна першої граничної задачі для рівняння теплопровідності, що має властивості

$$G(x, \xi, 0) = 0, \quad x \neq \xi, \quad G(x, \xi, t) > 0, \quad t > 0, \tag{10}$$

$$G(x, \xi, t) \leqslant \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t})^n} \exp\left\{-\frac{\| x - \xi \|^2_{E_n}}{4a^2 t}\right\}, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Omega} G(x, \xi, t)\, d\xi \leqslant 1. \tag{12}$$

Щоб одержати оцінку (7), розглянемо

$$\delta(t+\beta) = \sup_{x \in \Omega} | u(t+\beta, x, \lambda) - u(t+\beta, x, \lambda_0) + $$

$$+ \| Y(t+\beta, \lambda) - Y(t+\beta, \lambda_0) \|_{E_m} = \delta_1(t+\beta) + \delta_2(t+\beta).$$

Функції $u(t+\beta, x, \lambda)$ та $Y(t+\beta, \lambda)$ задовольняють рівняння

$$u(t+\beta, x, \lambda) = \int\limits_{\Omega} G(t+\beta, x, \xi)\, u(t, \xi, \lambda)\, d\xi + \int\limits_{t}^{t+\beta} d\tau \int\limits_{\Omega} G(t+\beta -$$

$$- \tau, x, \xi)\, f(\tau, \xi, u(\tau, \xi, \lambda), Y(\tau - \theta(\lambda), \lambda), \lambda)\, d\xi,$$

$$Y(t+\beta, \lambda) = Y(t, \lambda) + \int\limits_{t}^{t+\beta} H(\tau, u(\tau, x, \lambda), Y(\tau - \theta(\lambda), \lambda), \lambda)\, d\tau.$$

При $t = 0$, $\beta = t$ ці рівняння збігаються з рівняннями (8), (9). Звідси маємо

$$| u(t+\beta, x, \lambda) - u(t+\beta, x, \lambda_0) | \leqslant \int\limits_{\Omega} | G(x, \xi, t+\beta) | \times$$

$$+ | u(t, \xi, \lambda_0) - u(t, \xi, \lambda) |\, d\xi + \sum_{j=1}^{5} I_j,$$

де інтеграли $I_1 - I_4$ визначені аналогічно відповідним інтегралам в роботі [2], а

$$I_5 = \int\limits_{t}^{t+\beta} d\tau \int\limits_{\Omega} | G(x, t+\beta; \xi, \tau) | \, | f(\tau, x, u(t, x, \lambda_0), Y(t -$$

$$- \theta(\lambda_0), \lambda_0), \lambda_0) - f(\tau, x, u(t, x, \lambda_0), Y(t - \theta(\lambda), \lambda_0), \lambda_0) |\, d\xi.$$

Оцінки інтегралів

$$I_0 = \int\limits_{\Omega} | G | \, | u(t, \xi, \lambda_0) - u(t, \xi, \lambda) |\, d\xi$$

і $I_1 - I_4$ одержуються аналогічно відповідним оцінкам в [2].

В силу неперервності $\theta(\lambda)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує окіл $U_2(\lambda_0)$ такий, що для всіх $\lambda \in U_2(\lambda_0)$ виконується нерівність (див. [3])

$$\| Y(t - \theta(\lambda), \lambda_0) - Y(t - \theta(\lambda_0), \lambda_0) \|_{E_m} < \varepsilon. \tag{13}$$

Тоді, враховуючи умови теореми і нерівності (12) і (13), маємо $I_5 \leqslant K\varepsilon\beta$.

Таким чином, при $U(\lambda_0) = U_1(\lambda_0) \times U_2(\lambda_0)$ маємо оцінку [2]

$$\delta_1(t+\beta) \leqslant \delta_1(t) + C_1\delta(t) + C_2\beta^2 + C_3\beta^{1+\frac{\alpha}{2}} + K\varepsilon\beta + \eta, \tag{14}$$

де $\eta > 0$ — як завгодно мале число. Аналогічно оцінюється $\delta_2(t+\beta)$:

$$\delta_2(t+\beta) \leqslant \delta_2(t) + C_1\delta(t) + C_2\beta^2 + 2K\varepsilon\beta + 2\eta. \tag{15}$$

Склавши нерівності (14) і (15), одержимо оцінку для $\delta(t+\beta)$:

$$\delta(t+\beta) \leqslant \delta(t) + 2C_1\delta(t) + 2C_2\beta^2 + C_3\beta^{1+\frac{\alpha}{2}} + 2K\varepsilon\beta + 2\eta.$$

Повторюючи міркування І. І. Гіхмана і С. Д. Ейдельмана [4, 5], можна показати, що $\delta(t) < \sigma$, де σ — як завгодно мале число. Звідси випливають потрібні нерівності (7). Таким чином, теорема доведена на інтервалі $[0, t_1]$. Справедливість її на всьому інтервалі $[0, T]$ доводиться так, як і в [2]. Теорему доведено.

Із теореми 1 випливає теорема усереднення для системи

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon a^2\Delta u + \varepsilon f(t, x, u(t,x), Y(t-\theta(\varepsilon))), \tag{16}$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \varepsilon H(t, u(t,x), Y(t-\theta(\varepsilon))), \tag{17}$$

де $\varepsilon \geqslant 0$ — малий параметр.

Припустимо, що виконуються умови:

1) функціонали $f(t, x, u, Y)$ і $H(t, u, Y)$ задовольняють умову а) в області $[0, \infty] \times \Omega \times D_0 \times D$ і при $x \in \Omega$, $u \in D_0$ і $Y \in D$ існують границі

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x, u, Y)\,d\tau = f_0(x, u, Y), \tag{18}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T H(\tau, u, Y)\,d\tau = H_0(u, Y), \tag{19}$$

2) виконуються умови (2) і (3) теореми 1. Тоді має місце теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* 1), 2) *і розв'язок* $\{\bar{u}(t,x), \bar{Y}(t)\}$ *усередненої системи*

$$\frac{\partial \bar{u}(t,x)}{\partial t} = \varepsilon a^2\Delta u + \varepsilon f_0(x, \bar{u}(t,x), \bar{Y}(t)), \tag{20}$$

$$\frac{d\bar{Y}(t)}{dt} = \varepsilon H_0(\bar{u}(t,x), \bar{Y}(t)) \tag{21}$$

без запізнення при $\varepsilon = \varepsilon_0$ визначений для всіх $t \in [-\max\limits_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \theta(\varepsilon), \infty]$ і лежить в $D_0 \times D$ разом з деяким ρ-околом, то для всіх $T > 0$ і $\eta > 0$ знайдеться таке $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$, що для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ розв'язок $\{u(t, x, \varepsilon), Y(t, \varepsilon)\}$ системи (20), (21), який задовольняє нульові крайові і такі початкові умови:

$$u(0, x, \varepsilon) = \varphi(x), \quad Y(t,\varepsilon)\big|_{t\in[-\max\limits_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}\theta(\varepsilon), 0]} = \bar{Y}(\varepsilon t),$$

існує на інтервалі $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ і задовольняє нерівності

$$|u(t, x, \varepsilon) - \bar{u}(\varepsilon t, x)| < \eta, \quad \|Y(t,\varepsilon) - \bar{Y}(\varepsilon t)\| < \eta.$$

Теорема доводиться введенням заміни $\tau = \varepsilon t$ (див. [2, 3]).

Розглянемо тепер задачу (1) — (4) у випадку, коли θ не залежить від

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(t, x, u(t, x), Y(t-\theta), \lambda), \tag{22}$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = H(t, u(t, x), Y(t-\theta), \lambda), \tag{23}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u(t, x)|_{\Gamma} = 0, \tag{24}$$

$$Y(t)|_{t \in [-\theta, 0]} = Y_0(t). \tag{25}$$

Має місце така теорема.

Теорема 3. 1) *Нехай функціонали* $f(t, x, u, Y, \lambda)$ *і* $H(t, u, Y, \lambda)$ *задовольняють умови теореми* 1 *і неперервно диференційовні по* u, Y, λ;

2) *розв'язок задачі* (22) — (25) *при* $\lambda = \lambda_0$ *лежить в* $D_0 \times D$ *разом з деяким* ρ*-околом.*

Тоді розв'язок задачі (22) — (25) *диференційовний по* λ *в області* $[0, T] \times \Omega \times U(\lambda_0)$.

Доведення. На основі теореми 1 існує такий окіл $U(\lambda_0)$, що для всіх $\lambda \in U(\lambda_0)$ розв'язок задачі (22) — (25) є неперервна функція параметра λ. Візьмемо $\lambda \in U(\lambda_0)$ і $\lambda + \delta\lambda \in U(\lambda_0)$. Тоді:

$$\frac{\partial u(t, x, \lambda)}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u + f(t, x, u(t, x, \lambda), Y(t-\theta, \lambda), \lambda), \tag{26}$$

$$\frac{dY(t, \lambda)}{dt} = H(t, u(t, x, \lambda), Y(t-\theta, \lambda), \lambda), \tag{27}$$

$$\frac{\partial u(t, x, \lambda+\delta\lambda)}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(t, x, u(t, x, \lambda+\delta\lambda), Y(t-\theta, \lambda+\delta\lambda), \lambda+\delta\lambda), \tag{28}$$

$$\frac{dY(t, \lambda+\delta\lambda)}{dt} = H(t, u(t, x, \lambda+\delta\lambda), Y(t-\theta, \lambda+\delta\lambda), \lambda+\delta\lambda) \tag{29}$$

з граничними і початковими умовами

$$\begin{gathered} u(t, x, \lambda)|_{\Gamma} = u(t, x, \lambda+\delta\lambda)|_{\Gamma} = 0, \\ u(0, x, \lambda) = u(0, x, \lambda+\delta\lambda) = \varphi(x), \end{gathered} \tag{30}$$

$$Y(t, \lambda)|_{t \in [-\theta, 0]} = Y(t, \lambda+\delta\lambda)|_{t \in [-\theta, 0]} = Y_0(t). \tag{31}$$

Віднявши від (28) (26), а від (29) (27), ввівши позначення

$$u(t, x, \lambda+\delta\lambda) - u(t, x, \lambda) = \delta_\lambda u(t, x, \lambda),$$

$$Y(t, \lambda+\delta\lambda) - Y(t, \lambda) = \delta_\lambda Y(t, \lambda),$$

розділивши одержане рівняння на $\delta\lambda$ і застосувавши формулу Лагранжа, одержимо (див. [3]), що вирази $\frac{\delta_\lambda u}{\delta\lambda}$ і $\frac{\delta_\lambda Y}{\delta\lambda}$ є розв'язками рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta_\lambda u}{\delta\lambda}\right) = a^2 \Delta \left(\frac{\delta_\lambda u}{\delta\lambda}\right) + \frac{\delta_\lambda u}{\delta\lambda} \frac{\partial}{\partial u_1} f(t, x, u_1, Y_1, \lambda_1) +$$

$$+ \left(\frac{\delta_\lambda Y(t-\theta, \lambda)}{\delta\lambda}, \frac{\partial}{\partial Y_2}\right) f(t, x, u_2, Y_2, \lambda_2) + \frac{\partial}{\partial \lambda_3} f(t, x, u_3, Y_3, \lambda_3), \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta_\lambda Y}{d\lambda}\right) = \frac{\delta_\lambda u}{\delta\lambda}\frac{\partial}{\partial u_1} H(t, u_1, Y_1, \lambda_1) + \left(\frac{\delta_\lambda Y}{\delta\lambda}, \frac{\partial}{\partial Y_2}\right) \times$$
$$\times H(t, u_2 Y_2, \lambda_2) + \frac{\partial}{\partial \lambda_3} H(t, u_3, Y_3, \lambda_3) \tag{33}$$

з нульовими початковими і граничними умовами, де

$$u_j = u(t, x, \lambda) + q_{j1}\delta_\lambda u(t, x, \lambda),\ Y_j = Y(t-\theta, \lambda) + q_{j2}\delta_\lambda Y(t-\theta, \lambda),$$
$$\lambda_j = \lambda + q_{j3}\delta\lambda,$$

$q_{ij} \in (0, 1)$ — деякі константи, $\left(\frac{\delta_\lambda Y(t-\theta, \lambda)}{\delta\lambda}, \frac{\partial}{\partial Y_2}\right)$ — скалярний добуток.

Рівняння (32) і (33) — лінійні з коефіцієнтами, неперервними в області $[0, T] \times \Omega \times D_0 \times D \times U(\lambda_0)$.

Розв'язок цієї задачі існує, єдиний [1] і задовольняє умови теореми 1. Отже, існують границі

$$\lim_{\delta\lambda \to 0} \frac{\delta_\lambda u(t, x, \lambda)}{\delta\lambda} = u'_\lambda(t, x, \lambda),$$

$$\lim_{\delta\lambda \to 0} \frac{\delta_\lambda Y(t, \lambda)}{\delta\lambda} = Y'_\lambda(t, \lambda)$$

в області $[0, T] \times \Omega \times U(\lambda_0)$. Теорему 3 доведено.

Зауваження. В роботі [1, с. 694] некоректно визначена норма $\|\omega\|_*$. Треба визначити цю норму таким способом:

$$\|\omega\|_* = \max\{\|y\|, \|y'\|, \|u\|, \ldots, \|u^{2b}\|\},$$

де $\|y\| = \sup\limits_{t\in[0,T]} e^{-L_1 t}\|y\|_{E_m}$, $\|u\| = \sup\limits_{t\in[0,T]} e^{-L_1 t} \sup\limits_{x\in\Omega}\|u(t, x)\|_{E_n}$, $L_1 > 0$ — деяка стала, яка визначена в роботі [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Миронова В. В. О существовании и единственности решений некоторых систем дифференциальных уравнений.— УМЖ, 1975, 27, № 5, с. 691—695.
2. Эйдельман С. Д., Сирченко З. Ф. О применении принципа усреднения для решения некоторых параболических граничных задач.— УМЖ, 1973, 25, № 5, с. 621—631.
3. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., «Наука», 1969, с. 287.
4. Гихман И. И. По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова.— УМЖ, 1952, 4, № 2, с. 215—219.
5. Эйдельман С. Д. О применении принципа усреднения к квазилинейным параболическим системам второго порядка.— Сиб. мат. журн., 1962, 3, № 2, с. 302—307.

Інститут математики
АН УРСР

Надійшла до редакції
6.X. 1975 р.