УДК 518:517.948

В. Г. Мішутін

Комбіновані методи розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянуто алгоритм розв'язку систем лінійних рівнянь, побудованих на комбінації прямих і ітераційних методів розв'язування цих рівнянь.

Проблема розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сучасних ЦОМ далека від задовільного вирішення. Ось чому в даний час інтенсивно розробляються алгоритми, побудовані на сполученні прямих і ітераційних методів розв'язку рівнянь. Причому для побудови збіжного ітераційного методу, як правило, використовуються результати якого-небудь прямого методу [1]. Такий підхід до побудови алгоритмів розв'язування часто-густо дозволяє одержати ефективні методи розв'язування систем рівнянь з високим ступенем точності.

Наведемо тепер деякі допоміжні пропозиції, що будуть використані далі.

Означення 1. Матриця A з комплексними елементами називається позитивно визначеною за Ляпуновим, якщо [2]

$$\operatorname{Re} \lambda_A > 0. \tag{1}$$

Означення 2. Матриця A з комплексними елементами називається квазіпозитивно визначеною, якщо для неї можна вказати таку позитивно визначену матрицю W, при якій власні значення матричного пучка

$$L(\lambda) = A - \lambda W \tag{2}$$

містяться у середині правої напівплощини:

$$\operatorname{Re} \lambda_L = \operatorname{Re} \lambda_{W^{-1}A} = \operatorname{Re} \lambda_{AW^{-1}} > 0. \tag{3}$$

Позначимо обидва класи матриць буквами $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{M}$ відповідно.

Лема 1. (Теорема Ляпунова). *Матриця $A \in \mathfrak{L}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$A = WS, \tag{4}$$

де W і $\operatorname{Re} S$ — позитивно визначені матриці.

Лема 2. (Узагальнена теорема Ляпунова). *Матриця $A \in \mathfrak{M}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$A = W_0 WS, \tag{5}$$

де W_0, W і $\operatorname{Re} S$ — позитивно визначені матриці.

Обидва твердження не потребують доведення, їх неважко одержати із результатів роботи [2].

Лема 3. *Зворотна матриця A допускає зображення*

$$A = T_{L_1} T_{R_1} T_{L_2}, \tag{6}$$

$$A = VT_R, \tag{7}$$

де T_{L_1}, T_{L_2} — ліві трикутні матриці з одиничною діагоналлю, T_{R_1}, T_R — праві трикутні матриці, і V — унітарна матриця.

Нехай маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = f, \tag{8}$$

де A — зворотна матриця з дійсними елементами. Розв'язуватимемо її двома етапами.

1. На першому етапі при допомозі ЦОМ чи спеціалізованих обчислювальних пристроїв (наприклад, сіточних аналого-цифрових процесорів [3, 4]) обернемо задану матрицю A чи зведемо її до вигляду (6) чи (7). Ці розклади, як відомо, можуть бути одержані наближено:

$$A_1 = T_{L_1} T_{R_1} T_{L_2} = A + \delta_1 A, \quad A_2 = VT_R = A + \delta_2 A, \tag{9}$$

де $\delta_1 A$ і $\delta_2 A$ — похибки, які виникають за рахунок заокруглення чисел в ЦОМ. Якщо для обернення матриці A застосовується який-небудь тип спеціалізованих процесорів, то і в цьому випадку

$$A_3^{-1} = (A + \delta_3 A)^{-1}, \tag{10}$$

де $\delta_3 A$ — похибка, яка виникає за рахунок неточного надавання вихідної інформації [4].

Зрозуміло, що в усіх випадках можна одержати тільки наближений розв'язок рівняння (8).

2. На другому етапі, використовуючи матриці (6), (7) чи проміжні результати гауссівського методу виключення, як це показано в роботі [2], будують ітераційний метод

$$B\Delta x_k = -q(Ax_k - f) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

де $q > 0$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, який використовують в ЦОМ для уточнення наближеного розв'язку x_0, одержаного на першому етапі.

Означення 3. Збіжний ітераційний процес (11) будемо називати погано обумовленим, якщо

$$\rho(B^{-1}A) = \frac{\min \operatorname{Re} \lambda B^{-1}A}{\max |\lambda_{B^{-1}A}|} \ll 1. \tag{12}$$

Отже, нехай $B \cong A$ — матриця. Запишемо її в такому вигляді:

$$B = A + \delta A. \tag{13}$$

Розглянемо матрицю

$$\Gamma^{-1} = I + \delta A A^{-1}, \tag{14}$$

де I — тотожна матриця. Передбачивши, що матриця A і права частина f в ЦОМ задані точно, а нев'язка ($r_k = Ax_k - f$) обчислюється досить точно (див. [5]), доведемо таке твердження.

Теорема 1. *Ітераційний процес* (11) *збігається до розв'язку рівняння* (8) *при умові, що*

$$q = \frac{\min \operatorname{Re} \lambda_\Gamma}{\max |\lambda_\Gamma|} \tag{15}$$

із швидкістю геометричної прогресії

$$\Theta = \left[1 - \left(\frac{\min \operatorname{Re} \lambda_\Gamma}{\max |\lambda_\Gamma|}\right)^2\right]^{1/2} < 1 \tag{16}$$

тоді і тільки тоді, коли $\Gamma \in \mathfrak{L}$.

Доведення. Нехай x^* — розв'язок рівняння (8). Тоді, враховуючи (13), (14), із (11) знаходимо

$$(I + \delta A A^{-1}) \Delta r_k = -q r_k, \quad \Delta r_k = r_{k+1} - r_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

або

$$r_{k+1} = [I - q\Gamma] r_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Передбачимо, що ітераційний процес (18), а отже, і (11), при деякому числі q збігається. Тоді, очевидно, для матриці Γ виконується умова (1).

З іншого боку, нехай умова (1) справджується і матриця C зводить $\frac{1}{\mu}\Gamma$, де $\mu > 0$, до жорданової форми $J = \frac{1}{\mu} C\Gamma C^{-1}$. Тоді легко обчислити, що

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}(J_0 x, x) = \operatorname{Re}(\mu J x, x) \geqslant \min \operatorname{Re} \lambda_\Gamma \| x \|^2, \\ \| J_0 x \| \leqslant \max |\lambda_\Gamma| \, \| x \|, \quad x \in H, \end{gathered} \tag{19}$$

де Γ не має кратних характеристичних чисел (у цьому випадку $\mu = 1$), і

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}(J_0 x, x) = \operatorname{Re}(\mu J x, x) \geqslant (\min \operatorname{Re} \lambda_\Gamma - \varphi(\mu)) \| x \|^2, \\ \| J_0 x \| \leqslant (\max |\lambda_\Gamma| + \mu) \| x \|, \quad x \in H, \end{gathered} \tag{20}$$

якщо у матриці Γ власне число з $\min \operatorname{Re} \lambda_\Gamma$ кратне. Тут H — евклідовий комплексний простір і $\varphi(\mu)$ — невід'ємна функція, вид якої визначається кратністю власного значення з $\min \operatorname{Re} \lambda_\Gamma$, причому $\lim\limits_{\mu \to 0} \varphi(\mu) = 0$. Таким чином, нерівності (19) і (20) з точністю до як завгодно малого числа співпадають. Тому розрізняти їх не будемо.

Поклавши тепер у (18) $r_k = C^{-1} y_k$, маємо:

$$y_{k+1} = [I - qC\Gamma C^{-1}]\, y_k = [I - qJ_0]\, y_k.$$

Враховуючи (19), звідси знаходимо

$$(y_{k+1}, y_{k+1}) = \| y_{k+1} \|^2 = \| y_k \|^2 - 2q \operatorname{Re}(J_0 y_k, y_k) + q^2 \| J_0 y_k \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant [1 - 2q \min \operatorname{Re} \lambda_\Gamma + q^2 \max |\lambda_\Gamma|^2]\, \| y_k \|^2.$$

При умові (15) одержуємо оцінку

$$\| y_{k+1} \| \leqslant \left[1 - \left(\frac{\min \operatorname{Re} \lambda_\Gamma}{\max |\lambda_\Gamma|} \right)^2 \right]^{1/2} \| y_k \| = \Theta \| y_k \|.$$

Звідси випливає

$$\lim_{k \to \infty} \| y_k \| = \lim_{k \to \infty} \| C r_k \| = \lim_{k \to \infty} (C^* C r_k,\ r_k)^{1/2} =$$
$$= \lim_{k \to \infty} (W r_k, r_k)^{1/2} = \lim_{k \to \infty} \| r_k \|_W = 0,$$

де через $\| r_k \|_W$ позначено норму вектора в евклідовому просторі H_W. Тобто ітераційний процес (11) збігається із швидкістю геометричної прогресії в просторі H_W. Але оскільки, очевидно, $H_W = H$, то ітераційний процес (11) при умові (15) збігається із швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої визначається за допомогою формули (16), і у вихідному евклідовому просторі H, що і потрібно було довести.

Щоб порівняти одержаний результат із відомими раніше теоремами про умови збіжності методу (11) (див. [1, 5]) сформулюємо наслідок із теореми 1, використовуючи матрицю $B_0 = \delta A A^{-1}$.

Наслідок 1. *Якщо*

$$\operatorname{Re} \lambda_{B_0} = \operatorname{Re} \lambda_{\delta A A^{-1}} > -1, \tag{21}$$

то ітераційний процес (11) *збігається до розв'язку рівняння* (8) *при умові* (15) *із швидкістю геометричної прогресії* (16).

Наслідок 2. *Якщо*

$$\operatorname{Re}(\delta A A^{-1} u, u) > -1, \quad \| u \| = 1, \tag{22}$$

то ітераційний процес (11) *збігається до розв'язку рівняння* (8) *при умові* (15) *із швидкістю геометричної прогресії* (16).

Доведення. Поклавши в (22) $u = \dfrac{Ax}{\| Ax \|}$, маємо

$$\operatorname{Re}(\delta A A^{-1} u, u) = \operatorname{Re}\left(\delta A A^{-1} \frac{Ax}{\| Ax \|}, \frac{Ax}{\| Ax \|} \right) > -1.$$

Звідси

$$\operatorname{Re}([I + \delta A A^{-1}]\, Ax, Ax) = \operatorname{Re}(\Gamma^{-1} y, y) > 0, \quad y \neq 0.$$

Отже, умова (1) виконується. Тому ітераційний процес (11) збігається до розв'язку рівняння (8) при умові (15) із швидкістю геометричної прогресії, що і потрібно було довести.

Зауважимо, що наслідок 1 не потребує свого доведення, тому що із (21) беспосередньо випливає умова (1).

Порівнюючи тепер достатню умову (22) збіжності методу (11) з відомим результатом (див. [5, теорема (22.7)], в якому умова збіжності розглядуваного методу визначається нерівністю

$$\| F_m \| = \| A^{-1} \delta A \| \leqslant \sigma < \frac{1}{2}, \tag{23}$$

бачимо, наскільки жорстка умова критерію (23) порівняно з (21) і (22).

Таким чином, доведені вище твердження дозволяють зробити висновок, що ітераційний метод (11) має широкі можливості при розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Правда, порівнюючи (16) з числом (12), робимо висновок, що процес ітераційного уточнення наближених розв'язків може відбуватися в деяких випадках дуже повільно. Причому слід зауважити, що повільна збіжність методу (11) не обов'язково буде пов'язана з погано обумовленими системами рівнянь, як це може здатися на перший погляд. Легко можна побудувати приклад систем рівнянь з добре обумовленою матрицею, для якої ітераційний метод (11) буде погано обумовленим (повільно збіжним). Ще потрібно звернути увагу на той випадок, коли в методі (11) матриця B позитивно визначена, тому що для цих матриць розроблено багато методів їх обернення.

Наслідок 3. *Нехай $B = W_0$ — позитивно визначена. Тоді ітераційний метод* (11) *збігається до розв'язку рівняння* (8) *при умові* (15) *із швидкістю геометричної прогресії* (16), *якщо $A \in \mathfrak{M}$.*

Доведення останнього твердження безпосередньо випливає із лем 1, 2. На закінчення зупинимося на питанні вибору числа q для ітераційного процесу (11), тому що його оптимальне значення у вигляді (15) обчислити на практиці досить складно. Тому в загальному випадку для вибору числа q потрібно користуватися методом підбору. Проте, якщо, наприклад,

$$\operatorname{Re}(\Gamma x, x) \geqslant m \| x \|^2, \quad m > 0, \quad x \in H,$$

то слід покласти

$$q = q_k = \frac{\operatorname{Re}(\Gamma r_k, r_k)}{\| \Gamma r_k \|^2} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., «Наука», 1970. 564 с
2. Мишутин В. Г. Обобщенно положительно определенные матрицы и их приложения.— УМЖ, 1974, **26**, № 1, с. 99—102.
3. Мишутин В. Г., Проскурин Е. А. Новый принцип эквивалентности в теории электронного моделирования и его приложения.— Кибернетика, 1974, № 4, с. 18—22.
4. Мишутин В. Г. К вопросу гибридного математического обеспечения цифро-аналоговых вычислительных машин.— Кибернетика, 1975, № 2, с. 129—136.
5. Форсайт Дж., Моллер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., «Мир», 1969. 166 с.

Інститут кібернетики
АН УРСР

Надійшла до редакції
8.XII. 1974 р.