УДК 517.512.2

Н. С. Новікова, Н. І. Волкова

Абсолютна сумовність степеня p рядів Фур'є методом Вороного—Ньорлунда

У цьому повідомленні доведено теорему про абсолютну сумовність степеня $p \geqslant 1$ рядів Фур'є методом Вороного — Ньорлунда, при цьому у випадку, коли $p = 1$, приходимо до відомої теореми [1].

Нескінченний числовий ряд Σu_n вважають (див. [2]) сумовним методом Вороного — Ньорлунда до S або (WN, p_n)-сумовним до S, якщо $t_n \to S$, $n \to \infty$, де

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} S_k,\ S_k = \sum_{i=0}^{k} u_i, \quad P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k, \quad p_{-1} = P_{-1} = 0,$$

$\{p_n\}$ — послідовність дійсних чи комплексних чисел.

Ряд Σu_n вважатимемо абсолютно сумовним степеня $p \geqslant 1$ методом Вороного — Ньорлунда або $|WN, p_n|_p$-сумовним, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} |t_n - t_{n-1}|^p < \infty.$$

Зауважимо, що у випадку $p = 1$ маємо відомий $|WN, p_n|$-метод.

Нехай $f(t)$ — 2π-періодична функція, інтегрована за Лебегом на $(-\pi, \pi)$. Припустимо, що ряд Фур'є її має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Введемо такі позначення:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)],$$

$$R_n = \frac{(n + 1) p_n}{P_n}.$$

Вважають [3], що ряд Ξu_n абсолютно сумовний степеня $p > 1$ трикутним матричним Г-методом або $|\Gamma|_p$-сумовний, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^p < \infty,$$

де $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} u_k$ — середні Г-методу.

Для $|\Gamma|_p$-сумовності рядів Фур'є доведена [3] така теорема.

Теорема А. *Якщо*

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{t^{p-1}} |\Phi'(t)|^p \, dt < \infty \quad \textit{при деякому } x; \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{z}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left| c_n\left(\frac{1}{z}\right)\right| = O(1), \quad 0 < \frac{1}{z} < \pi,$$

$$c_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (\gamma_{nk} - \gamma_{n-1,k}) \frac{\sin kt}{k}; \tag{2}$$

$$\int_0^{\pi} (nt)^{\frac{p-1}{p}} |c_n(t)| \, dt = O(1), \tag{3}$$

то ряд Фур'є функції $f(t)$ при $t = x$ $|\Gamma|_p$-сумовний.

Відзначимо, що твердження теореми А має місце і при виконанні умов (1) та (2), бо умова (3) випливає з (2).

В роботі [1] доведено, що для $|WN, p_n|$-сумовності рядів Фур'є функції $f(t)$ має місце.

Теорема В. *Якщо $\Phi(t)$ — функція з обмеженою варіацією на* $(0, \pi)$, *то ряд Фур'є функції $f(t)$ при $t = x$ $|WN, p_n|$-сумовний, де $\{p_n\}$ задовольняє такі умови:*

$$p_n \geqslant 0, \quad P_n \to \infty, \quad n \to \infty; \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta R_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |R_n - R_{n-1}| = O(1); \tag{5}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{P_n}{(k+2) P_k} = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Доведемо, що має місце така теорема.

Теорема. *Якщо виконується умова* (1), *то ряд Фур'є функції $f(t)$ при $t = x$ $|WN, p_n|_p$-сумовний, $p \geqslant 1$, де $\{p_n\}$ задовольняє умови* (4), (5) *та*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{P_n}{k^{1/p} P_{k-1}} = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Доведення. Легко бачити, що у випадку, коли $p = 1$, одержуємо теорему В.

Нехай тепер $p > 1$. Для методу Вороного — Ньорлунда

$$c_n(t) = \frac{1}{P_n P_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (P_n p_k - p_n P_k) \frac{\sin(n-k)t}{n-k}, \quad 0 < t < \pi.$$

Доведемо, що можна застосувати до $|WN, p_n|_p$-методу теорему А. Оскільки умова (1) тривіальна, то залишається довести, що з умов (4), (5) та (7) випливає (2)

Маємо
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{z}\right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (P_n p_k - p_n P_k) \frac{\sin(n-k)\frac{1}{z}}{n-k} \right| =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{[z]} + \sum_{n=[z]+1}^{\infty} \right) \left(\frac{n}{z}\right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (P_n p_k - p_n P_k) \frac{\sin(n-k)\frac{1}{z}}{n-k} \right| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Легко бачити, що з умови (7) випливає (6), тоді, як доведено в [1],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (P_n p_k - p_n P_k) \frac{\sin(n-k)\frac{1}{z}}{n-k} \right| = O(1).$$

Отже,

$$\Sigma_1 < \sum_{n=1}^{[z]} \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (P_n p_k - p_n P_k) \frac{\sin(n-k)\frac{1}{z}}{n-k} \right| = O(1).$$

Далі, використовуючи тотожність

$$\frac{P_n p_k - p_n P_k}{P_n P_{n-1}} = \frac{P_k (R_k - R_n) + (n-k) p_k}{(n+1) P_{n-1}},$$

одержимо

$$\Sigma_2 < \frac{1}{z^{\frac{p-1}{p}}} \sum_{n=[z]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p} P_{n-1}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (R_k - R_n) P_k \frac{\sin(n-k)\frac{1}{z}}{n-k} \right| + \frac{1}{z^{\frac{p-1}{p}}} \sum_{n=[z]}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p} P_{n-1}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} p_k \sin(n-k)\frac{1}{z} \right| = \Sigma_{21} + \Sigma_{22}.$$

Беручи до уваги, що

$$\left| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu \frac{\sin(n-\nu)t}{n-\nu} \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} \Delta P_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\sin(n-\mu)t}{n-\mu} + P_k \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\sin(n-\mu)t}{n-\mu} \right| = O(1) \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{\nu+1} + P_k \right| = O(P_k),$$

і завдяки умовам (7) та (5), маємо

$$\Sigma_{21}=\frac{1}{z^{\frac{p-1}{p}}}\sum_{n=[z]+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/p}P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta(R_k-R_n)\sum_{\nu=0}^{k}P_\nu\frac{\sin(n-\nu)\frac{1}{z}}{n-\nu}+\right.$$

$$\left.+(R_{n-1}-R_n)\sum_{k=0}^{n-1}P_k\frac{\sin(n-k)\frac{1}{z}}{n-k}\right|=$$

$$=O(1)\sum_{n=[z]+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/p}P_{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-2}|\Delta R_k|P_k-|R_{n-1}-R_n|P_{n-1}\right)=$$

$$=O(1)\sum_{n=[z]+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/p}P_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta R_k|P_k=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta R_k|P_k\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/p}P_{n-1}}=$$

$$=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta R_k|=O(1).$$

Згідно з перетворенням Абеля

$$\sum_{k=0}^{n-1}p_k\sin(n-k)\frac{1}{z}=p_{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sin(n-\nu)\frac{1}{z}+$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{[z]-1}+\sum_{k=[z]}^{n-2}\right)\Delta p_k\sum_{\nu=0}^{k}\sin(n-\nu)\frac{1}{z}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{[z]-1}p_\nu\sin(n-\nu)\frac{1}{z}+p_{[z]}\sum_{\nu=0}^{[z]-1}\sin(n-\nu)\frac{1}{z}+$$

$$+\sum_{k=[z]}^{n-2}\Delta p_k\sum_{\nu=0}^{k}\sin(n-\nu)\frac{1}{z}+p_{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sin(n-\nu)\frac{1}{z}.$$

Тоді згідно з умовою (5)

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}p_k\sin(n-k)\frac{1}{z}\right|=P_{[z]}+O(1)zp_{[z]}+O(1)\sum_{k=[z]}^{n-2}|\Delta p_k|+O(1)zp_{n-1}=$$

$$=O(1)P_{[z]}+O(1)z\sum_{k=[z]}^{n-2}|\Delta p_k|+O(1)zp_{n-1}.$$

Таким чином,

$$\Sigma_{22}=\frac{1}{z^{\frac{p-1}{p}}}\sum_{n=[z]+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/p}P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}p_k\sin(n-k)\frac{1}{z}\right|=\frac{O(1)}{z^{\frac{p-1}{p}}}\sum_{n=[z]+1}^{\infty}\frac{P_{[z]}}{n^{1/p}P_{n-1}}+$$

$$+ O(1)\, z^{1/p} \sum_{n=[z]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p} P_{n-1}} \sum_{k=[z]-1}^{n-2} |\Delta p_k| + O(1)\, z^{1/p} \sum_{n=[z]+1}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{n^{1/p} P_{n-1}} =$$
$$= \Sigma_{221} + \Sigma_{222} + \Sigma_{223}.$$

Згідно з умовою (7)

$$\Sigma_{221} = O(1) \sum_{n=[z]+1}^{\infty} \frac{P_{[z]}}{n^{1/p} P_{n-1}} = O(1).$$

Користуючись тотожністю

$$\frac{\Delta p_k}{P_{k+1}} = \frac{\Delta R_k}{k+2} + R_k \left(\frac{P_k}{P_{k+1}} \cdot \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

та завдяки умовам (7) і (6), одержимо, що

$$\Sigma_{222} = O(1)\, z^{1/p} \sum_{k=[z]-1}^{\infty} |\Delta p_k| \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p} P_{n-1}} = O(1)\, z^{1/p} \sum_{k=[z]-1}^{\infty} \frac{|\Delta p_k|}{P_{k+1}} =$$

$$= O(1)\, z^{1/p} \sum_{k=[z]-1}^{\infty} \frac{|\Delta R_k|}{k+2} + O(1)\, z^{1/p} \sum_{k=[z]-1} R_k \left| \frac{P_k}{P_{k+1}} \cdot \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right| =$$

$$= O(1) \frac{z^{1/p}}{[z]+1} \sum_{k=[z]-1}^{\infty} |\Delta R_k| + O(1)\, z^{1/p} \sum_{k=[z]-1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = O(1).$$

Нарешті,

$$\Sigma_{223} = O(1)\, z^{1/p} \sum_{n=[z]+1}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{n^{1/p} P_{n-1}} = O(1)\, z^{1/p} \sum_{n=[z]+1}^{\infty} R_n \frac{1}{n^{1+1/p}} = O(1).$$

Отже, умова (2) для $|WN, p_n|_p$-методу виконується. Залишається застосувати теорему A.

ЛІТЕРАТУРА

1. Varshney O. P. On the Absolute Nörlund summability of a Fourier seris, Math. Zeitschrift, 1964, 83.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
3. Слепенчук К. М. Абсолютная суммируемость в степени p рядов Фурье треугольными матричными методами.— В кн.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Вып. 5. Днепропетровск, 1974, с. 132—136.

Дніпропетровський
державний університет

Надійшла до редакції
29.XII. 1975 р.