УДК 519.9

А. М. Плічко

М-базиси в сепарабельних і рефлексивних банахових просторах

Нехай E — лінійний нормований простір і E' його спряжений. Набір $\{e_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ називається тотальною біортогональною системою, якщо $f_\alpha(e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ і $\{f_\alpha\}$ тотальна в E. Якщо, крім того, $\{e_\alpha\}$ тотальна в E, то $\{e_\alpha, f_\alpha\}$ називається М-базисом (базисом Маркушевича). М-базис називатимемо обмеженим, якщо $\sup\limits_\alpha \|f_\alpha\| \|e_\alpha\| < \infty$, ε-нормованим, якщо $\sup\limits_\alpha \|f_\alpha\| \times \|e_\alpha\| \leqslant 1 + \varepsilon$ і нормованим, якщо $\varepsilon = 0$.

У роботі [1, с. 205] поставлено такі дві задачі: 1) чи існує в будь-якому сепарабельному банаховому просторі нормований М-базис і 2) чи існує в такому ж просторі обмежений М-базис.

Доведемо твердження, яке слабкіше від першої задачі, але сильніше від другої, а також одержимо інші близькі результати. У статті використовуються такі позначення: $[M]$ — замкнена лінійна оболонка множини M, $M^\perp = \{f \in E' : f(M) = 0\}$, якщо $M \subset E$ і $M^\perp = \{x \in E : x(M) = 0\}$, якщо $M \subset E'$; $d(M, N)$ — віддаль між множинами M та N.

Сепарабельні простори. В роботі [2] анонсовано таке твердження.

Теорема 1. *Для всяких сепарабельного нормованого лінійного простору E і $\varepsilon > 0$ існує ε-нормований М-базис.*

Доведення. Побудова. Нехай $\{n_i\}$ строго зростаюча послідовність натуральних чисел; позначимо $P_i = \left\{ n : \sum\limits_{s=1}^{n_{i-1}} n_s < n \leqslant \sum\limits_{s=1}^{n_i} n_s \right\}$. На підставі леми 1 роботи [3] виберемо біортогональну систему $\{x_n, g_n\}$, що $\|x_n\| = \|g_n\| = 1$, і

а) $d(x, [x_n : n \in P_s,\ s > i]) > \|x\|/2$ для $x \in [x_n : n \in P_s,\ s \leqslant i]$, а отже, $d(x, [x_n : n \notin P_i]) > \|x\|/8$ для $x \in [x_n : n \in P_i]$;

б) $\frac{1}{2}\|x\|_{l_2} \leqslant \|x\| \leqslant \frac{3}{2}\|x\|_{l_2}$, де $x = \sum\limits_{n \in P_i} \alpha_n x_n$, $\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum\limits_{n \in P_i} (\alpha_n)^2}$;

в) $[[x_n]_1^\infty + \{g_n\}^\perp] = E$, $[x_n]_1^\infty \cap \{g_n\}^\perp = 0$.

Згідно з теоремою 3 роботи [4] $\{x_n, g_n\}$ можна розширити до М-базису з допомогою наборів $\{y_j\} \subset \{g_n\}^\perp$ і $\{h_j\} \subset ([x_n]_1^\infty)^\perp$ з $\|y_j\| = 1$. Нехай $d(y_j, h_j^\perp) = \alpha_j$. Виберемо подвійну послідовність $\{n_j^k\}_{j,k=1}^\infty$, $\{n_j^k\} \subset \{n_i\}$ так, щоб при будь-яких k і j

$$\frac{6}{\sqrt{n_j^k}} \leqslant \varepsilon; \qquad \frac{(n_j^k - 1)\varepsilon}{8} - \frac{2^9}{\varepsilon} > \begin{cases} n_j^{k-1} & \text{при } k \neq 1, \\ \dfrac{\sqrt{n_j^1}}{a_j} & \text{при } k = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Через P_j^k позначимо те P_i, при якому $n_j^k = n_i$. Покладемо

$$e_n = \begin{cases} x_n & \text{при } n \notin P_j^k, \\ x_n + y_j/\sqrt{n_j^1} & \text{при } n \in P_j^1, \\ x_n + \Big(\sum\limits_{s \in P_j^k} x_s\Big)/n_j^{k-1} & \text{при } n \in P_j^k,\ k \neq 1, \end{cases}$$

і $D_n = [\{e_m\}_1^\infty \setminus e_n]$. Виберемо $\{f_n\}$ так, щоб $f_m(e_n) = \delta_{mn}$ (далі буде показано, що $e_n \notin D_n$, тому такий вибір можливий).

Тотальність $\{e_n\}$. Застосовуючи послідовно вираз (2) та умови б) і (1), одержуємо

$$\left\| \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \Big(\sum_{n \in P_j^k} e_n\Big)/n_j^k + \frac{1}{\sqrt{n_j^1}}\, y_i \right\| = \left\| \frac{1}{n_j^t} \Big(\sum_{n \in P_j^t} x_n\Big) \right\| \leqslant \frac{3}{2\sqrt{n_j^t}} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

Таким чином, $\{y_j\} \subset [e_n]_1^\infty$; згідно з (2) та умовою в)

$$\{x_n\} \subset [e_n]_1^\infty \quad \text{і} \quad [e_n]_1^\infty = E.$$

Тотальність $\{f_n\}$. Згідно з побудовою $\{f_n\}$ і щільністю $\{e_n\}$ у просторі E тотальність $\{f_n\}$ еквівалентна рівності $\bigcap_m [e_n]_m^\infty = 0$. Але $\bigcap_m [e_n]_m^\infty \subset (\{g_n\} \cup \{h_j\})^\perp = 0$, тому $\{f_n\}^\perp = 0$.

Нерівність $\sup_n \| f_n \| \| e_n \| \leqslant 1 + \varepsilon$. Покажемо спочатку, що

$$d(e_n, D_n) \geqslant 1 - \varepsilon/2. \tag{3}$$

Виберемо будь-який елемент z з лінійної оболонки множини $\{e_m\} \setminus e_n$,

$$z = \sum_{i=1}^{t} z_i, \quad z_i \in [e_s : s \in P_i]. \tag{4}$$

Якщо $n \notin \bigcup_{jk} P_j^k$, то (3) випливає безпосередньо з побудови; нехай $n \in P_j^k$. Згідно з (2) та умовами б) і (1) $\| e_n - z \| \geqslant \| x_n - z \| - \varepsilon/4$. Нехай

$$\| x_n - z \| < 1 - \varepsilon/4. \tag{5}$$

Тоді внаслідок виразу (2) в сумі (4) знайдеться доданок $z_j^{k+1} = \sum_{s \in P_j^{k+1}} \alpha_s e_s$, для якого

$$b_j^k = \Big(\sum_{s \in P_j^{k+1}} \alpha_s \Big) / n_j^k > \varepsilon/4. \tag{6}$$

1. Покажемо, що в сумі (4) існує доданок $z_j^k = \sum_{s \in P_j^k} \alpha_s e_s$, для якого

$$\Big| \sum_{s \in P_j^k} \alpha_s \Big| > \begin{cases} n_j^k & \text{при } k \neq 1, \\ \sqrt{n_j^1}/a_j & \text{при } k = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Дійсно, застосувавши послідовно нерівність (5) та умови а) і б), одержимо

$$1 - \varepsilon/4 > \| x_n - z \| = \Big\| \Big(x_n - \sum_{s \in P_j^k} (b_j^k + \alpha_s) x_s \Big) -$$

$$- \Big(z - b_j^k \sum_{s \in P_j^k} x_s - \sum_{s \in P_j^k} \alpha_s x_s \Big) \Big\| \geqslant \frac{1}{8} \Big\| x_n - \sum_{s \in P_j^k} (b_j^k + \alpha_s) x_s \Big\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{16} \Big\| x_n - \sum_{s \in P_j^k} (b_j^k + \alpha_s) x_s \Big\| \geqslant \frac{1}{16} \sqrt{\sum_{\substack{s \in P_j^k \\ s \neq n}} (b_j^k + \alpha_s)^2}.$$

Звідси

$$(1 - \varepsilon/4)^2 \geqslant 2^{-8} \sum_{s \in P_j^k, s \neq n} (b_j^k + \alpha_s)^2.$$

Зробивши алгебраїчні перетворення, маємо

$$-2b_j^k \sum_{s \in P_j^k, s \neq n} \alpha_s \geqslant (n_j^k - 1)(b_j^k)^2 - 2^8 (1 - \varepsilon/4)^2.$$

Поділивши останню нерівність на $2|b_j^k|$ і скориставшись співвідношеннями (6) та (1), одержимо

$$\left|\sum_{\substack{s\in P_j^k\\ s\neq n}}\alpha_s\right|>\begin{cases} n_j^{k-1} & \text{при } k\neq 1,\\ \sqrt{n_j^1}/a_j & \text{при } k=1.\end{cases}\tag{8}$$

З вибору елемента z випливає $\alpha_n=0$, тому (7) доведено. При $k\neq 1$ переходимо до п. 2, при $k=1$ — до п. 3.

2. Таким чином,

$$|b_j^{k-1}|\geqslant 1,\tag{9}$$

де $b_j^{k-1}=\left(\sum\limits_{s\in P_j^k}\alpha_s\right)/n_j^{k-1}$; покладемо $u_j^{k-1}=b_j^{k-1}\sum\limits_{s\in P_j^{k-1}}x_s$. Проведемо ще раз міркування, подібні до п. 1. Покажемо, що в сумі (4) існує доданок $z_j^{k-1}=\sum\limits_{s\in P_j^{k-1}}\alpha_s e_s$, для якого

$$\left|\sum_{s\in P_j^{k-1}}\alpha_s\right|>\begin{cases} n_j^{k-2} & \text{при } k\neq 2,\\ \sqrt{n_j^1}/a_j & \text{при } k=2.\end{cases}\tag{10}$$

Справді, застосувавши послідовно вираз (5) та умови *а*) і б), одержимо

$$1-\varepsilon/4\geqslant\|x_n-z\|=\Bigg\|x_n-u_j^{k-1}-\sum_{s\in P_j^{k-1}}\alpha_s x_s-$$

$$-\Bigg(z-u_j^{k-1}-\sum_{s\in P_j^{k-1}}\alpha_s x_s\Bigg\|\geqslant\frac{1}{8}\Bigg\|u_j^{k-1}+\sum_{s\in P_j^{k-1}}\alpha_s x_s\Bigg\|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{16}\Bigg\|u_j^{k-1}+\sum_{s\in P_j^{k-1}}\alpha_s x_s\Bigg\|_{l_2}=\frac{1}{16}\sqrt{\sum_{s\in P_j^{k-1}}(b_j^{k-1}+\alpha_s)^2}.$$

Звідси $(1-\varepsilon/4)^2\geqslant 2^{-8}\sum\limits_{s\in P_j^{k-1}}(b_j^{k-1}+\alpha_s)^2.$

Зробивши алгебраїчні перетворення, маємо

$$-2b_j^{k-1}\sum_{s\in P_j^{k-1}}\alpha_s\geqslant n_j^{k-1}(b_j^{k-1})^2-2^8(1-\varepsilon/4)^2.$$

Поділивши цю нерівність на $2|b_j^{k-1}|$ і враховуючи (9) та (1), одержуємо (10). При $k\neq 2$ переходимо до п. 2, замінивши k на $k-1$, при $k=2$ — до п. 3.

3. Через скінченне число кроків прийдемо до того, що сума (4) містить доданок $z_j^1=\sum\limits_{s\in P_j^1}\alpha_s x_s+y$, де

$$y=\left(\sum_{s\in P_j^1}\alpha_s\right)y_j/\sqrt{n_j^1}\ \text{ і }\ \left|\sum_{s\in P_j^1}\alpha_s\right|\geqslant\sqrt{n_j^1}/a_j.$$

Оскільки $x_n-(z-y)\in h_j^\perp$, то $\|x_n-(z-y)-y\|\geqslant a_j\|y\|\geqslant 1$, що суперечить нерівності (5) і, отже, співвідношення (3) виконується. Як неважко перевірити, $\| f_n \| \leqslant 1/d(e_n, D_n)$, тому $\| f_n \| \| e_n \| \leqslant (1+\varepsilon/4)/d(e_n, D_n) \leqslant (1+\varepsilon/4)/(1-\varepsilon/2) \leqslant 1+\varepsilon$. Остання нерівність виконується при $\varepsilon < 1/2$, що не обмежує загальності міркувань. Теорему доведено.

Наслідок 1. *У будь-якому сепарабельному лінійному нормованому просторі E для всякого $\varepsilon > 0$ можна ввести норму $\| x \| \leqslant ||| x ||| \leqslant (1+2\varepsilon) \| x \|$ так, щоб простір $(E, ||| \, |||)$ мав нормований М-базис.*

Справді, нехай $\{e_n, f_n\}$ — система, побудована в теоремі 1; тоді за норму $||| \, |||$ можна взяти калібрувальну функцію множини $\{x \in E : \| x \| \leqslant 1, f_n(x) \leqslant f_n(e_n), n = \overrightarrow{1, \infty}\}$.

Наслідок 2. *Нехай $l_1 \subset c_0$ — природне вкладення простору абсолютно сумовних послідовностей в простір послідовностей збіжних до нуля. Будь-який сепарабельний банахів простір E ε-ізометричний простору E_1 проміжному між l_1 і c_0 (тобто $l_1 \subset E_1 \subset c_0$, причому обидва вкладення щільні і $\| x \|_{c_0} \leqslant \| x \|_{E_1} \leqslant \| x \|_{l_1}$ для $x \in l_1$).*

WCG-простори. Банахів простір E називається WCG-простором (weak compact generated), якщо він породжується компактною в слабкій топології $\sigma(E, E')$ множиною U, $[U] = E$. Зокрема, сепарабельний і рефлексивний простори будуть WCG-просторами.

Теорема 2. *У будь-якому WCG-просторі існує обмежений М-базис.*

Доведення. Позначимо через $\operatorname{dens} E$ найменшу потужність всюди щільних підмножин E, і нехай α_0 — перше порядкове число потужності $\operatorname{dens} E$. Нехай $\{n_i\}$ — строго зростаюча послідовність натуральних чисел і P_i ті ж, що і в теоремі 1. З роботи [3] випливає, що у будь-якому WCG-просторі можна вибрати обмежену біортогональну систему $\{x_\alpha^n, f_\alpha^n\}_{1 \leqslant \alpha < \alpha_0}^{n=1,\infty}$, що для всяких α і P_i:

а) $d(x, [x_\beta^n : n \notin P_i \vee \beta \neq \alpha]) > \| x \|/8$ для $x \in [x_\beta^n : n \in P_i \wedge \beta = \alpha]$;

б) $c \| x \|_{l_2} \leqslant \| x \| \leqslant C \| x \|_{l_2}$, де $x = \sum_{n \in P_i} a_\alpha^n x_\alpha^n$, $\| x \|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n \in P_i} (a_\alpha^n)^2}$, $0 < c \leqslant C < \infty$;

в) $M \cap N = 0$, $[M + N] = E$, де $M = [x_\alpha^n]_{\alpha, n}$, $N = [f_\alpha^n]_{\alpha, n}^{\perp}$.

Розглянемо фактор-простір E/M. Образ $\widehat{N}$ підпростору N при канонічному відображенні $K : E \to E/M$ буде всюди щільним підпростором E/M. Провівши такі ж міркування, як і в роботі [5], можна показати, що в E/M існує М-базис $\{\widehat{y}_\beta, g_\beta\}_{\beta < \alpha_0}$, $\widehat{y}_\beta \in \widehat{N}$. Виберемо представники $y_\beta \in N$ з $\widehat{y}_\beta$. Кожному y_β поставимо у взаємно однозначну відповідність деяку послідовність $\{x_\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$. Далі провівши точно таку ж конструкцію, як і в теоремі 1, можна побудувати обмежений M-базис у просторі E. Теорему доведено.

Наслідок. *У будь-якому рефлексивному банаховому просторі існує обмежений М-базис.*

Автор висловлює вдячність Ю. І. Петуніну за увагу до роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Банах С. Курс функціонального аналізу. К., «Радянська школа», 1948. 211 с.
2. Плічко А. М. Існування повної ε-ортонормальної системи в сепарабельному нормованому просторі.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 1, с. 22—23.
3. Dawis W., Jonson W. B. On the existence of fundamental and total bounded biorthogonal system in Banach spaces.— Studia Math., 1973, 45, № 2, p. 173—179.
4. Singer I. On biorthogonal systems and total sequences of functionals.— Math. Ann., 1971, 193, № 3, p. 183—186.
5. Amir D., Lindenstrauss J. The structure of weackly compact sets in Banach spaces.— Ann. of Math., 1968, 88, № 1, p. 35—46.

Київський
державний університет

Надійшла до редакції
17.II. 1975 р.