УДК 517.929

В. П. Скрипник

Поведінка розв'язків рівнянь з перетвореним аргументом

У випадку, коли перетворення аргументу залежать лише від часу, для інтегро-диференціальних рівнянь близькі питання вивчались в роботі [1]. В роботі [2] для системи диференціальних рівнянь із зліченним числом перетворень аргументу, що залежать від часу, доведено існування n лінійно незалежних розв'язків із заданою поведінкою при $t \to \infty$.

У цій роботі для розв'язків системи диференціальних рівнянь із зліченним числом перетворень аргументу, що залежить від часу і розв'язку, доведено асимптотичну оцінку при $t \to \infty$.

Позначення. $f(t, \xi_k) = f(t, \xi_1, \xi_2, \ldots)$, де $f, \xi_1, \xi_2, \ldots \in R^m$. $\|\cdot\|$ — норма вектора або матриці, яка дорівнює сумі модулів елементів. $Y(t)$ — матричний розв'язок системи

$$y' = A(t)\, y, \tag{1}$$

що задовольняє початкову умову $Y(0) = E$, де E — одинична матриця. Ξ — множина обмежених послідовностей в R^m. $Z_\lambda^l(t_0, M)$, де $\lambda \geqslant 0$, $l > 0$, $M \geqslant 0$, — множина вектор-функцій, які визначені при $t \in [t_0 - M, t_0]$ і задовольняють умову Ліпшіца з константою λ і нерівність $\|z\| \leqslant l$.

Розглянемо систему

$$x'(t) = A(t)\, x(t) + f(t, x(\varphi_k(t, x(t)))). \tag{2}$$

Сукупність таких умов для системи (2) назвемо умовами ω.

1) Елементи матриці $A(t)$ вимірні на будь-якому скінченному відрізку $[0, T]$, причому $\|A(t)\| \leqslant K < \infty$;

2) компоненти вектор-функції $f(t, \xi_k)$ визначені при $t \geqslant 0$ і будь-яких ξ_k таких, що $\{\xi_k\} \in \Xi$, причому при фіксованих ξ_k вимірні по t на будь-якому скінченному відрізку $[0, T]$;

3) при $\{\xi_k'\}, \{\xi_k''\} \in \Xi$ $\|f(t, \xi_k'') - f(t, \xi_k')\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \|\xi_k'' - \xi_k'\|$, де $h_k(t)$ — вимірні функції на будь-якому скінченному відрізку $[0, T]$, причому $h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) \leqslant \beta < \infty$, $\int_0^{\infty} h(\tau)\, d\tau < \infty$;

4) при $\xi_k = 0$ $f(t, \xi_k) \equiv 0$;

5) функції $\varphi_k(t, \xi)$ визначені при $t \geqslant 0$ і будь-яких ξ, причому при фіксованих ξ вимірні по t на будь-якому скінченному відрізку $[0, T]$;

6) $0 \leqslant \Delta_k(t, \xi) \leqslant M$, де $\Delta_k = t - \varphi_k$;

7) $|\varphi_k(t, \xi'') - \varphi_k(t, \xi')| \leqslant \nu(t) \|\xi'' - \xi'\|$, де $\nu(t)$ — вимірна і обмежена функція на будь-якому скінченному відрізку $[0, T]$.

Візьмемо якусь множину $Z_\lambda^l(t_0, M)$; $t_0 \geqslant 0$ і нехай $z \in Z_\lambda^l(t_0, M)$. Вектор-функцію $x(t)$ називатимемо розв'язком системи (2), коли $t \in [t_0, T]$, що відповідає z, якщо справджуються такі умови: 1) при $t \in [t_0 - M, t_0]$ $x(t) = z(t)$; 2) компоненти вектор-функції $x(t)$ абсолютно неперервні на відрізку $[t_0, T]$; 3) вираз $A(t)x(t) + f(t, x(\varphi_k(t, x(t))))$ визначений при всіх $t \in [t_0, T]$; 4) рівність (2) справджується майже скрізь на $[t_0, T]$.

Теорема. *Припустимо, що*: 1) *для системи* (2) *справджуються умови* ω; 2) *існує така неперервна додатна при* $t \geqslant 0$ *функція* $\chi(t)$ *і таке число* b, *що якщо* $0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$, *то* $\|Y(t)Y^{-1}(\tau)\| \leqslant b\dfrac{\chi(t)}{\chi(\tau)}$; 3) *існує таке число* N, *що якщо* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_1 + M$, *то* $\chi(t_1) \leqslant N\chi(t_2)$; 4) *якщо* $t \geqslant M$, $t - M \leqslant s \leqslant t$, *то* $x(s)\nu(t) \leqslant \gamma < \infty$. *Тоді яким би не було* $c > 0$, *існують такі* $t_0 \geqslant 0$, λ *і* $l > 0$, *що для будь-якої* $z \in Z_\lambda^l(t_0, M)$ *існує єдиний розв'язок* $x(t)$ *системи* (2), *коли* $t \geqslant t_0$ *відповідний* z. *При* $t \geqslant t_0$ $\|x(t)\| \leqslant c\chi(t)$.

Доведення. Візьмемо a, c і δ такі, що $c, \delta > 0$ і $0 < a < c$. Позначимо $H(t_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} h(\tau)\,d\tau$,

$$P(t_0) = \max\{\delta N, bcN\beta + (Ka + KbcNH(t_0))N\},$$

$$L(t_0) = P(t_0)\gamma, \qquad Q(t_0) = (L(t_0) + N)\,bH(t_0), \qquad d(t_0) = bcNH(t_0).$$

Візьмемо t_0 таке, що $t_0 \geqslant M$, $H(t_0) \leqslant \dfrac{c-a}{bcN}$, $Q(t_0) < 1$. Позначимо

$$\mu(t_0) = \inf_{t \in [t_0 - M, t_0]} \chi(t).$$

Виберемо число $\lambda > 0$ таким, щоб $\lambda \leqslant \delta\mu(t_0)$.

Існує таке $l > 0$, що якщо $z \in Z_\lambda^l(t_0, M)$, то $\|z(t)\| \leqslant c\chi(t)$ і якщо $\|y(t_0)\| \leqslant l$, то при $t \geqslant t_0$ $\|y(t)\| \leqslant a\chi(t)$.

Нехай $z \in Z_\lambda^l(t_0, M)$. Розглянемо послідовні наближення

$$x^{[n]}(t) = \begin{cases} y(t) + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)Y^{-1}(\tau) f(\tau, x^{[n-1]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-1]}(\tau))))\,d\tau & \text{при } t \geqslant t_0, \\ z(t) & \text{при } t \in [t_0 - M, t_0), \end{cases}$$

$$x^{[0]}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{при } t \geqslant t_0, \\ z(t) & \text{при } t \in [t_0 - M, t_0), \end{cases} \tag{3}$$

де $y(t)$ — розв'язок системи (1), що задовольняє умову $y(t_0) = z(t_0)$.

При $t \geqslant t_0$ вірна нерівність $\|x^{[0]}(t)\| \leqslant c\chi(t)$. Припустимо, що при $t \geqslant t_0$ $\|x^{[n-1]}(t)\| \leqslant c\chi(t)$.

Згідно з виразом (3) проведемо таку оцінку:

$$\|x^{[n]}(t)\| \leqslant a\chi(t) + b\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\chi(t)}{\chi(\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau)\,\|x^{[n-1]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-1]}(\tau)))\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant a\chi(t) + bc\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\chi(t)}{\chi(\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau)\,\chi(\varphi_k(\tau, x^{[n-1]}(\tau)))\,d\tau \leqslant a\chi(t) +$$

$$+ bcN\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\chi(t)}{\chi(\tau)}\chi(\tau)h(\tau)\,d\tau = (a + bcNH(t_0))\chi(t) \leqslant c\chi(t).$$

Отже, при $t \geqslant t_0$

$$\| x^{[n]}(t) \| \leqslant c\chi(t). \tag{4}$$

Нехай $t'' \geqslant t' \geqslant t_0$. Враховуючи, що

$$\| (Y(t'') - Y(t')) Y^{-1}(\tau) \| \leqslant Kb \int_{t'}^{t''} \frac{\chi(\sigma)}{\chi(\tau)} d\sigma,$$

проведемо таку оцінку:

$$\left\| \int_{t_0}^{t''} Y(t'') Y^{-1}(\tau) f(\tau, x^{[n-2]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau)))) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{t_0}^{t'} Y(t') Y^{-1}(\tau) f(\tau, x^{[n-2]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau)))) d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t'}^{t''} \| Y(t'') Y^{-1}(\tau) \| \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau) \| x^{[n-2]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) \| d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t'} \| (Y(t'') - Y(t')) Y^{-1}(\tau) \| \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau) \| x^{[n-2]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) \| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant bc \int_{t'}^{t''} \frac{\chi(t'')}{\chi(\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau) \chi(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) d\tau + Kbc \int_{t_0}^{t'} \left(\int_{t'}^{t''} \frac{\chi(\sigma)}{\chi(\tau)} d\sigma \right) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau) \chi(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) d\tau \leqslant bcN\beta\chi(t'')(t'' - t') +$$

$$+ KbcNH(t_0) \int_{t'}^{t''} \chi(\tau) d\tau.$$

Враховуючи одержану нерівність, а також нерівність $\| y(t'') - y(t') \| \leqslant \leqslant Ka \int_{t'}^{t''} \chi(\tau) d\tau$ з (3) одержимо, що

$$\| x^{[n-1]}(t'') - x^{[n-1]}(t') \| \leqslant bcN\beta\chi(t'')(t'' - t') + (Ka + KbcNH(t_0)) \int_{t'}^{t''} \chi(\tau) d\tau.$$

Тому при $t', t'' \geqslant t_0$

$$\| x^{[n-1]}(t'') - x^{[n-1]}(t') \| \leqslant [bcN\beta\chi(\bar{t}) + (Ka + KbcNH(t_0)) N\chi(\bar{t})] \, | t'' - t' |,$$

де $\bar{t} = \max\{t', t''\}$.

Оскільки при $t', t'' \in [t_0 - M, t_0]$

$$\| z(t'') - z(t') \| \leqslant \delta\chi(\bar{t}) \, | t'' - t' |,$$

то при $t', t'' \geqslant t_0 - M$

$$\| x^{[n-1]}(t'') - x^{[n-1]}(t') \| \leqslant P(t_0) \chi(\bar{t}) \, | t'' - t' |.$$

Звідси випливає, що при $\tau \geqslant t_0$

$$\| x^{[n-1]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-1]}(\tau))) - x^{[n-1]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) \| \leqslant$$

$$\leqslant L(t_0) \| x^{[n-1]}(\tau) - x^{[n-2]}(\tau) \|,$$

а отже,

$$\| x^{[n-1]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-1]}(\tau))) - x^{[n-2]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) \| \leqslant L(t_0) \| x^{[n-1]}(\tau) - x^{[n-2]}(\tau) \| + \| x^{[n-1]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) - x^{[n-2]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) \|. \quad (5)$$

Нехай $t \geqslant t_0$. Тоді в силу (3)

$$\| x^{[1]}(t) - x^{[0]}(t) \| \leqslant bc \int_{t_0}^{t} \frac{\chi(t)}{\chi(\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau) \chi(\varphi_k(\tau, x^{[0]}(\tau))) \, d\tau \leqslant d(t_0) \chi(t).$$

Припустимо, що справджується нерівність

$$\| x^{[n-1]}(t) - x^{[n-2]}(t) \| \leqslant d(t_0) Q^{n-2}(t_0) \chi(t).$$

Скористаємось виразом (3). Тоді

$$\| x^{[n]}(t) - x^{[n-1]}(t) \| \leqslant bL(t_0) \int_{t_0}^{t} \frac{\chi(t)}{\chi(\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau) \| x^{[n-1]}(\tau) - x^{[n-2]}(\tau) \| \, d\tau +$$

$$+ b \int_{t_0}^{t} \frac{\chi(t)}{\chi(\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau) \| x^{[n-1]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) - x^{[n-2]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) \| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant bL(t_0) d(t_0) Q^{n-2}(t_0) H(t_0) \chi(t) +$$

$$+ bd(t_0) Q^{n-2}(t_0) \int_{t_0}^{t} \frac{\chi(t)}{\chi(\tau)} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\tau) \chi(\varphi_k(\tau, x^{[n-2]}(\tau))) \, d\tau \leqslant bd(t_0) Q^{n-2}(t_0) \times$$

$$\times H(t_0)(L(t_0) + N) \chi(t) = d(t_0) Q^{n-1}(t_0) \chi(t).$$

Отже, на будь-якому відрізку $[t_0, T]$ послідовність $\{x^{[n]}(t)\}$ збігається рівномірно. Позначимо

$$x(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x^{[n]}(t) & \text{при} \quad t > t_0, \\ z(t) & \text{при} \quad t \in [t_0 - M, t_0]. \end{cases}$$

Тоді в силу (4) при $t \geqslant t_0$ $\| x(t) \| \leqslant c\chi(t)$.

В силу (5) можливий граничний перехід під знаком інтеграла

$$\int_{t_0}^{t} Y(t) Y^{-1}(\tau) f(\tau, x^{[n-1]}(\varphi_k(\tau, x^{[n-1]}(\tau)))) \, d\tau.$$

Тому $x(t)$ є розв'язком системи (2), коли $t \geqslant t_0$, відповідним $z(t)$. Не важко показати, що цей розв'язок єдиний. Теорему доведено.

Зазначимо, що якщо перетворення аргументу не залежать від розв'язку, то умова (4) теореми є зайвою.

Як приклад розглянемо рівняння

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} x\left(t - \frac{|\sin x(t)|}{\ln(t+2)}\right). \quad (6)$$

Тут

$$A(t) = \frac{1}{t+1}, \qquad f(t, \xi) = \frac{\xi}{(t+1)^2}, \qquad \varphi(t, \xi) = t - \frac{|\sin \xi|}{\ln(t+1)},$$

$$K = 1, \qquad h(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, \qquad \beta = 1, \qquad \nu(t) = \frac{1}{\ln(t+1)}, \qquad M = \frac{1}{\ln 2},$$

$$Y(t) = \ln(t+1), \quad \chi(t) = \ln(t+1), \quad b = 1, \quad N = 1,$$

$$\gamma = 1, \quad H(t_0) = \frac{1}{t_0+1}.$$

Візьмемо $a = \delta = 1$, $c = 2$. Оскільки

$$P(t_0) = 3 + \frac{2}{t_0+1}, \quad L(t_0) = P(t_0), \quad Q(t_0) = \left(4 + \frac{2}{t_0+1}\right)\cdot\frac{1}{t_0+1},$$

то можна взяти $t_0 = 5$. Крім того, можна взяти $\lambda = l = \ln 6$. Тоді, яка б не була функція $z \in Z_{\ln 6}^{\ln 6}\left(5, \frac{1}{\ln 2}\right)$, існує єдиний розв'язок $x(t)$ рівняння (6), коли $t \geqslant 5$, відповідний z. При $t \geqslant 5$ $\|x(t)\| \leqslant 2\ln(t+1)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ведь Ю. А. К теории устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с запаздывающим аргументом.— В кн. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Вып. 7, Фрунзе, 1970, с. 59—100.
2. Скрипник В. П. Поведение решений систем с преобразованным аргументом. Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их приложениям. Фрунзе, 1975, с. 89—91.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1954. 216 с.
4. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М., «Наука», 1971. 295 с.

Московський
лісотехнічний інститут

Надійшла до редакції
9.II. 1976 р.