УДК 517.948:517.544

В. І. Слизький

Про теорію Нетера узагальненої задачі Карлемана для двох функцій для багатозв'язної області

Нехай $Д^+$ — скінченна $(m+1)$-зв'язна область, обмежена контуром Ляпунова L. Крива L складається із $m+1$ замкнених кривих L_n, $(n = 0,1, \ldots, m)$, де L_0 обіймає всі інші криві L_n. Доповнення $Д^+ + L$ до повної площини позначимо через $Д^-$. Точка $z = \infty$ належить $Д^-$.

Нехай $\alpha(t) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n(t)\, \omega(t, L_n)$, де $\omega(t, L_n)$ — гармонічна міра [1] кривої L_n відносно області $Д^+$; $\alpha_n(t)$ — гомеоморфізм кривої L_n на себе, який змінює орієнтацію кривої L_n на протилежну та задовольняє дві умови: $\alpha_n[\alpha_n(t)] \equiv t$ (умова Карлемана), похідна $\alpha_n'(t)$ відмінна від нуля на L_n та H-неперервна.

Розглядаємо таку граничну задачу: знайти дві функції $\Phi^+(z)$ та $\Phi_1^+(z)$ аналітичні в області $Д^+$ та H-неперервні в $Д^+ + L$ за граничною умовою

$$A(t)\Phi^+(t) + B(t)\Phi^+[\alpha(t)] + C(t)\overline{\Phi^+(t)} + D(t)\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} =$$

$$= A_1(t)\Phi_1^+(t) + B_1(t)\Phi_1^+[\alpha(t)] + C_1(t)\overline{\Phi_1^+(t)} + D_1(t)\overline{\Phi_1^+[\alpha(t)]} + g(t) \qquad (1)$$

або

$$A(t)\,\Phi^{+}(t)+B(t)\,\Phi^{+}[\alpha(t)]+C(t)\,\overline{\Phi^{+}(t)}+D(t)\,\overline{\Phi^{+}[\alpha(t)]}=$$

$$=A_1(t)\,\Phi_1^{+}(t)+B_1(t)\,\Phi_1^{+}[\alpha(t)]+C_1(t)\,\overline{\Phi_1^{+}(t)}+D_1(t)\,\overline{\Phi_1^{+}[\alpha(t)]}, \qquad (1')$$

де H-неперервні функції $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$, $D_1(t)$, $g(t)$ задовольняють деякі умови, які будуть вказані далі.

Поставимо питання про умови нетеровості та нормальну розв'язність граничної задачі (1). Надалі нам знадобиться таке твердження [2, 3].

Лема. *Якщо зсув $\alpha(t)$ — гомеоморфізм контура L на себе, який змінює орієнтацію кривої L на протилежну, а функції $\Phi^{+}(z)$ та $\Phi_1^{+}(z)$ — аналітичні в області $Д^{+}$, то вірне інтегральне зображення*

$$\Phi^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]\,d\tau}{\tau-z}+i\int\limits_L \omega(\tau,L_m)\,\varphi(\tau)\,[d\sigma+d\sigma_\alpha]$$

$$\Phi_1^{+}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-z}+i\int\limits_L \omega(\tau,L_m)\,\varphi(\tau)\,[d\sigma+d\sigma_\alpha] \qquad (2)$$

де $d\sigma$ та $d\sigma_\alpha$ — елементи дуги L обчислені відповідно в точках t та $\alpha(t)$, густина $\varphi(t)$ обчислена з точністю до члена виду $i\sum\limits_{n=0}^{m-1}C_n\omega(t,L_n)$, в якому C_n довільні константи.

Використовуючи рівності (2), формули Сохоцького та умови Карлемана, зведемо (1′) до еквівалентного інтегрального рівняння

$$K\varphi(t)\equiv[A(t)+B_1(t)]\,\varphi[\alpha(t)]+[B(t)+A_1(t)]\,\varphi(t)+[C(t)+D_1(t)]\,\overline{\varphi[\alpha(t)]}+$$

$$+[D(t)+C_1(t)]\,\overline{\varphi[\alpha(t)]}+\frac{A(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]\,d\tau}{\tau-t}-\frac{B(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d[\alpha(\tau)]}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-$$

$$-\frac{C(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi[\alpha(\tau)]\,d\tau}}{\bar\tau-\bar t}+\frac{D(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi(\tau)\,d[\alpha(\tau)]}}{\overline{\alpha(\tau)}-\overline{\alpha(t)}}-\frac{B_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]\,d[\alpha(\tau)]}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}+$$

$$+\frac{A_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}-\frac{D_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi[\alpha(\tau)]\,d[\alpha(\tau)]}}{\overline{\alpha(\tau)}-\overline{\alpha(t)}}-\frac{C_1(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi(\tau)\,d\tau}}{\bar\tau-\bar t}+$$

$$+2\beta_1[A(t)+B(t)+C(t)+D(t)-A_1(t)-B_1(t)-C_1(t)-D_1(t)]+$$

$$+2\beta_2 i[A(t)+B(t)-A_1(t)-B_1(t)+C_1(t)+D_1(t)-C(t)-D(t)]=0, \qquad (3)$$

де $\beta_1=\operatorname{Re}C$, $\beta_2=\operatorname{Im}C$, $C=i\int\limits_L \omega(t,L_m)\,\varphi(t)\,[d\sigma+d\sigma_\alpha]$.

Інтегральне рівняння (3) нетерове [3, 4] при виконанні на L умови

$$\Delta(t)\equiv\begin{vmatrix} B(t) & C(t) & B_1(t) & C_1(t)\\ A[\alpha(t)] & D[\alpha(t)] & A_1[\alpha(t)] & D_1[\alpha(t)]\\ \overline{D(t)} & \overline{A(t)} & \overline{D_1(t)} & \overline{A_1(t)}\\ \overline{C[\alpha(t)]} & \overline{B[\alpha(t)]} & \overline{C_1[\alpha(t)]} & \overline{B_1[\alpha(t)]}\end{vmatrix}\neq 0, \qquad (4)$$

а індекс рівняння (3) обчислюється за формулою

$$\varkappa = \operatorname{ind}[\Delta(t)]. \tag{5}$$

Перевіркою переконуємось, що функції: $i\omega(t, L_n)$, (де $n = 0, 1, \ldots, m-1$), є власні функції рівняння (3). Із співвідношень (2) випливає, що цим і тільки цим розв'язкам відповідають нульові розв'язки задачі (1'). Нехай l та k відповідно числа лінійно незалежних розв'язків задачі (1') та інтегрального рівняння (3). Тоді, як легко бачить, $l = k - m + 2$.

Інтегральне рівняння, союзне із (3), має вигляд

$$-(A[\alpha(t)] + B_1[\alpha(t)])\alpha'(t)\psi[\alpha(t)] + [B(t) + A_1(t)]\psi(t) -$$
$$-\overline{(C[\alpha(t)] + D_1[\alpha(t)])}\,\overline{\alpha'(t)t'^2\psi[\alpha(t)]} + \overline{[D(t) + C_1(t)]}\,\overline{t'^2\psi(t)} -$$
$$-\frac{\alpha'(t)}{\pi i}\int_L \frac{A[\alpha(\tau)]\psi[\alpha(\tau)]\,d[\alpha(\tau)] - B(\tau)\psi(\tau)\,d\tau + \overline{C[\alpha(\tau)]\psi[\alpha(\tau)]\,d[\alpha(\tau)]}}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} +$$
$$+\frac{\alpha'(t)}{\pi i}\int_L \frac{\overline{D(\tau)\psi(\tau)\,d\tau}}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{A_1(\tau)\psi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} +$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B_1[\alpha(\tau)]\psi[\alpha(\tau)]\,d[\alpha(\tau)] - \overline{C_1(\tau)\psi(\tau)\,d\tau} + \overline{D_1[\alpha(\tau)]\psi[\alpha(\tau)]\,d[\alpha(\tau)]}}{\tau - t} +$$
$$+ 2i[\overline{t'} + \overline{t'_\alpha}\alpha'(t)]\,\omega(t, L_m)\left\{\int_L [A(\tau) + B(\tau) - A_1(\tau) - B_1(\tau)]\psi(\tau)\,d\tau +\right.$$
$$\left. + \int_L \overline{[C(\tau) + D(\tau) - C_1(\tau) - D_1(\tau)]\psi(\tau)\,d\tau}\right\} = 0. \tag{6}$$

Можна показати, що всі розв'язки рівняння (6) задовольняють умову

$$\int_L [A(t) + B(t) - A_1(t) - B_1(t)]\psi(t)\,dt +$$
$$+ \int_L \overline{[C(t) + D(t) - C_1(t) - D_1(t)]\psi(t)\,dt} = 0. \tag{7}$$

Використовуючи формули Сохоцького, умову (7) та рівняння (6), маємо:

$$A(t)\psi(t) - B[\alpha(t)]\alpha'(t)\psi[\alpha(t)] + \overline{C(t)t'^2\psi(t)} -$$
$$-\overline{D[\alpha(t)]\alpha'(t)t'^2\psi[\alpha(t)]} = \Psi_1^+(t), \tag{8}$$
$$A_1(t)\psi(t) - B_1[\alpha(t)]\alpha'(t)\psi[\alpha(t)] + \overline{C_1(t)t'^2\psi(t)} -$$
$$-\overline{D_1[\alpha(t)]\alpha'(t)t'^2\psi[\alpha(t)]} = \Psi_2^+(t),$$

де $\Psi_1^+(t)$ та $\Psi_2^+(t)$ — граничні значення функцій аналітичних в області $Д^+$, $t' = t'(\sigma)$, σ—дугова абсциса. Якщо вилучити із рівностей (8) функцію $\psi(t)$, то прийдемо до граничної задачі (яку назвемо союзною до граничної задачі (1'))

$$\frac{A(t)\Delta[\Psi_{1,2}^+(t)] - \overline{D[\alpha(t)]\alpha'(t)t'^2\Delta[\Psi_{1,2}^+(\alpha(t))]}}{\Delta(t)} +$$
$$+\frac{\overline{C(t)t'^2\Delta[\Psi_{1,2}^+(t)]} - B[\alpha(t)]\alpha'(t)\Delta[\Psi_{1,2}^+(\alpha(t))]}{\Delta[\alpha(t)]} = \Psi_1^+(t), \tag{9}$$

де

$$
\Delta\,[\Psi_{1,2}^{+}(t)] \equiv \begin{vmatrix} \overline{\Psi_1^{+}(t)\,t'^2} & D[\alpha(t)] & \overline{A(t)} & \overline{B[\alpha(t)]} \\ -\Psi_1^{+}[\alpha(t)]\,\alpha'(t) & A[\alpha(t)] & \overline{D(t)} & \overline{C[\alpha(t)]} \\ \overline{\Psi_2^{+}(t)\,t'^2} & D_1[\alpha(t)] & \overline{A_1(t)} & \overline{B_1[\alpha(t)]} \\ -\Psi_2^{+}[\alpha(t)]\,\alpha'(t) & A_1[\alpha(t)] & \overline{D_1(t)} & \overline{C_1[\alpha(t)]} \end{vmatrix}.
$$

Нехай l' та k' відповідно число лінійно незалежних розв'язків задачі (9) та інтегрального рівняння (6). Легко бачити, що $l' = k'$. Різниця $l - l' = k - k' - m + 2 = \varkappa - m + 2$ є індексом задачі (1).

Для розв'язності [5—7] інтегрального рівняння $K\varphi(t) = 2\,g(t)$ необхідно та досить, щоб виконувалась умова

$$
\mathrm{Re} \int_L g(t)\,\psi(t)\,dt = 0,
$$

де $\psi(t)$ — загальний розв'язок інтегрального рівняння (6).

Із усього розгляненого випливає вірність таких тверджень.

Теорема 1. *Для нетеровості граничної задачі* (1) *необхідно та досить, щоб на L виконувалась умова* $\Delta(t) \neq 0$.

Теорема 2. *Для розв'язності граничної задачі* (1) *необхідно та досить, щоб виконувалась умова*

$$
\mathrm{Re} \int_L \frac{g(t)\,\Delta[\Psi_{1,2}^{+}(t)]}{\Delta(t)}\,dt = 0,
$$

де $\{\Psi_1^{+}(z),\ \Psi_2^{+}(z)\}$ *— загальний розв'язок союзної задачі* (9).

Теорема 3. *Індекс J граничної задачі* (1) *дорівнює* $J = \varkappa - m + 2$, *де* $\varkappa = ind\,[\Delta(t)]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М. — Л., Гостехиздат, 1941. 385 с.
2. Литвинчук Г. С., Нечаев А. П. К теории обобщенной краевой задачи Карлемана. — ДАН СССР, 1969, 189, № 1, с. 38—41.
3. Нечаев А. П. Обобщенная краевая задача типа Карлемана для многосвязной области. — Сообщения II конференции Ростовского математического общества. Т. 1. Ростов-на Дону, 1969, с. 58—65.
4. Литвинчук Г. С. Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно-сопряженными неизвестными. — Изв. АН СССР. Сер. математики, 1967, 31, № 3, с. 563—586.
5. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., «Наука», 1970. 379 с.
6. Гахов Р. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963. 639 с.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968. 511 с.

Краматорський
індустріальний інститут

Надійшла до редакції
31.VII. 1975 р.