УДК 517.948

А. Ф. Турбін

Узагальнення теореми К. Іосіди про абстрактний потенціал в гільбертовому просторі

Вступ. Нехай H — (дійсний чи комплексний) гільбертовий простір.

Означення 1. [1, с. 412]. Лінійний оператор V в H з щільною областю визначення $D(V)$ та щільною областю значень $R(V)$ називаємо абстрактним потенціальним оператором, якщо існує оператор V^{-1} такий, що

$$A = -V^{-1} \tag{1}$$

є інфінітезимальним оператором однопараметричної півгрупи класу (C_0) операторів стискання в H.

В роботі [2] К. Іосіда довів таку теорему.

Теорема 1. *Нехай U — лінійний оператор, що задовольняє вимоги (індекс a зверху означає замикання відповідної множини в топології норми H):*

$$D(U)^a = H, \tag{2}$$

$$R(U)^a = H, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}(Uf, f) \geqslant 0 \ \text{для} \ f \in D(U). \tag{4}$$

(*Оператор, що задовольняє умову* (4), *називаємо акретивним* (див., наприклад [3]). *Тоді існує принаймні один абстрактний потенціальный оператор V, який є замкненим лінійним акретивним розширенням U. Оператор V, зокрема, може співпадати з U.*

Аналіз проведеного К. Іосідою доведення показує, що якщо узагальнити поняття абстрактного потенціального оператора, то можна послабити умову (3), розширивши тим самим і клас відповідних півгруп.

Суть узагальнення полягає в тому, що в рівності (3) допускається строге включення:

$$R(U)^a \subset H. \tag{5}$$

Відповідний результат сформульовано в теоремі 2. Нам здається, що запроваджене у цій статті узагальнення поняття абстрактного потенціалу цікаве не тільки з точки зору півгруп операторів стискання в гільбертових просторах, але й тим, що покладена в основу узагальнення ідея для випадку банахових просторів з конусом приводить до потенціалів марковських півгруп, які раніше не розглядались, відповідних певним класам додатно зворотних марковських процесів.

1. Узагальнений абстрактний потенціальний оператор. Нехай P — щільно визначений акретивний оператор. Відомо, що в цьому випадку P і, значить, P^* також щільно визначений (див., наприклад [4, с. 337]).

Позначимо через $N(P) = \{f \in H : Pf = 0\}$ ядро оператора P (нуль-простір оператора P). Із щільної визначеності P^* випливає замкненість $N(P)$ в H. Відомо також (див. [3, с. 199]), що для всякого акретивного оператора P і $f,\ g \in D(P)$ має місце нерівність

$$|(Pf, g)|^2 \leqslant \operatorname{Re}(Pf, f)\operatorname{Re}(Pg, g). \tag{6}$$

Нехай тут $g \in N(P)$. Тоді $(Pf, g) = 0$ для кожного $f \in D(P)$, тобто

$$R(P)^{\perp} = N(P). \tag{7}$$

Якщо врахувати, крім того, що для будь-якого щільно визначеного оператора P $R(P)^{\perp} = N(P^*)$, то одержуємо

$$N(P) = N(P^*). \tag{8}$$

Як доповнення до щільної визначеності і акретивності оператора вимагатимемо виконання умови

$$H = N(P) \oplus R(P)^a. \tag{9}$$

Позначимо через Π ортопроектор, породжений розвиненням (9):

$$\Pi f = f, \quad f \in N(P),$$

$$\Pi f = 0, \quad f \in D(P) \cap R(P)^a. \tag{10}$$

Лема. *Якщо P — щільно визначений акретивний оператор, що задовольняє умову* (9) *і Π — ортопроектор на $N(P)$, то оператор $P + \Pi$ оборотний в широкому розумінні і $(P + \Pi)^{-1}$ має щільну область визначення.*

Доведення. Оборотність в широкому розумінні означає (див. [3, с. 85]), що $(P + \Pi)^{-1}$ не обов'язково скрізь визначений і обмежений.

Доведемо, що рівняння

$$(P + \Pi)x = f \tag{11}$$

має єдиний розв'язок в $D(P)$ для будь-якого $f \in N(P) \oplus R(P)$. З рівності (11) одержуємо $Px = f - \Pi x$ і, отже, множачи це рівняння на Π зліва і враховуючи (10), одержуємо

$$\Pi x = \Pi f. \tag{12}$$

Таким чином, в (11) маємо

$$Px = (I - \Pi) f. \tag{13}$$

Враховуючи (9), будь-який елемент з $D(P)$, а отже, і x, можна подати у вигляді

$$x = x_0 + x_1, \tag{14}$$

де $x_0 \in N(P)$, $x_1 \in D(P) \cap R(P)^a$.

Умова (9) забезпечує інваріантність підпростору $R(P)^a$ в тому розумінні, що якщо $f \in D(P) \cap R(P)^a$, то $Pf \in R(P) \subset R(P)^a$. Тому можемо розглядати звуження P_1 оператора P на $R(P)^a : P_1 f = Pf$ для $f \in D(P) \cap R(P)^a$. Таким чином, з (13) і (14) маємо $P_1 x_1 = (I - \Pi) f$.

Оператор P_1 згідно з (9) встановлює взаємно однозначну відповідність між $D(P) \cap R(P)^a$ і $R(P)$, звідки $x_1 = P_1^{-1}(I - \Pi) f$.

Із рівності (14) $x_1 = P_1^{-1}(I - \Pi) f + x_0$, а з (12) $\Pi f = \Pi x = x_0$ і $x = P_1^{-1}(I - \Pi) f + \Pi f$. Лему доведено.

Дамо тепер означення узагальненого абстрактного потенціального оператора.

Означення 2. Щільно визначений акретивний оператор P, що задовольняє умову (9), називаємо узагальненим абстрактним потенціальним оператором, якщо оператор $A = \Pi - (P + \Pi)^{-1}$ є інфінітезимальним оператором однопараметричної півгрупи класу (C_0) операторів стиснення в H.

Зауваження 1. Якщо $\dim N(P) = 0$, то (узагальнений) абстрактний потенціальний оператор збігається з абстрактним потенціальним оператором в розумінні означення 1.

Зауваження 2. Оператор $(P + \Pi)^{-1} - \Pi$ є узагальненим оберненим в розумінні Мура — Пенроуза для оператора P [5.6].

2. Теорема існування. Доведемо тепер узагальнення теореми Іосіди.

Т е о р е м а 2. *Нехай T — лінійний оператор в H, що задовольняє умови*

$$D(T)^a = H, \tag{2'}$$

$$N(T) \oplus R(T)^a = H, \tag{3'}$$

$$\operatorname{Re}(Tf, f) \geqslant 0 \text{ для } f \in D(T). \tag{4'}$$

Тоді існує принаймні один узагальнений абстрактний потенціальний оператор P, який є замкненим акретивним розширенням оператора T. Оператор P може збігатись з T.

Для доведення існування замкненого акретивного розширення оператора T використовуємо лише щільну визначеність (умова (2')) і акретивність (умова (4')) і тому користуємся тим же методом Р. Фрідріхса [4], в основі якого лежить продовження перетворення Келі оператора T, який застосовували вже для цієї мети Б. Секефальві — Надь і Б. Фояш [3, гл. 4, § 4] і К. Іосіда [2]. Вважатимемо, що деяке замкнене акретивне розширення P оператора T побудовано. Із замкненості підпростору $N(T)$ і властивостей розширення оператора T до P вказаним методом випливає, що $N(P) = N(T)$. Крім того, із визначення оператора P випливає, що

$$H = N(P) \oplus R(P)^a. \tag{15}$$

Із замкненості оператора P випливає замкненість оператора $A = \Pi - (P + \Pi)^{-1}$. Покажемо, що оператор P є узагальненим абстрактним потенціальним оператором.

Для $\lambda > 0$ покладемо

$$R(\lambda) = P(\lambda P + \mathrm{I})^{-1} + \frac{1}{\lambda}\Pi. \tag{16}$$

Враховуючи акретивність оператора P, маємо для $f \in D(P)$

$$\|\lambda Pf\|^2 \leqslant \|\lambda Pf\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda Pf, f) + \|f\|^2 = \|(\lambda P + I)f\|^2,$$

звідки, поклавши $f = (\lambda P + I)^{-1}g$, знаходимо

$$\|\lambda P(\lambda P + I)^{-1}g\| \leqslant \|g\|, \quad g \in N(P) \oplus R(P). \tag{17}$$

Зауважимо, що $Pf = P(I - \Pi)f$, $f \in D(P)$.

Нехай $f_1 = (I - \Pi)f$ — проекція вектора f на $R(P)^a$ і $f_0 = \Pi f$ — проекція вектора f на $N(P)$. Із виразу (16), використовуючи (15) і (17) для $f \in D(P)$ одержуємо

$$\|\lambda R(\lambda)f\|^2 = \|\lambda P(\lambda P + I)^{-1}f\|^2 + \|\Pi f\|^2 = \|\lambda P(\lambda P + I)^{-1}f_1\|^2 + \|f_0\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|f_1\|^2 + \|f_0\|^2 = \|f\|^2.$$

Звідки випливає, що

$$\|\lambda R(\lambda)\| \leqslant 1. \tag{18}$$

Нехай $R_0(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\Pi$, $R_1(\lambda) = P(\lambda P + I)^{-1}$, $\lambda > 0$. Легко переконатися, що функції $R_0(\lambda)$ і $R_1(\lambda)$ (кожна окремо) задовольняють резольвентне рівняння

$$R_i(\lambda) - R_i(\mu) = (\mu - \lambda) R_i(\lambda) R_i(\mu), \quad i = 0, 1. \tag{19}$$

Згідно з тим, що Π приводить P, тобто

$$\Pi Pf = 0, \ f \in D(P) \text{ і } P\Pi f = 0, \ f \in H, \tag{20}$$

резольвентне рівняння задовольняє і оператор-функція $R(\lambda)$, яка є тому псевдорезольвентною [7, с. 299]. Нерівність (18) дозволяє нам застосувати

Абелеву ергодичну теорему, щоб встановити область значень псевдорезольвенти $R(\lambda)$: для будь-якого $\lambda > 0$

$$R(R(\lambda))^a = \{f \in H : \lim_{\mu\to\infty} \mu R(\mu) f = f\} = N(P) \oplus \{f \in H : \lim_{\mu\to\infty} \mu R_1(\mu) f = f\}. \quad (21)$$

Розглянемо звуження P_1 оператора P на $R(P)^a$ (див. доведення леми). Нехай $R_{11}(\lambda) = P_1(\lambda P_1 + I)^{-1}$. В силу того, що $R(P_1)^a = R(P)^a$, одержуємо

$$\{f \in H : \lim_{\mu\to\infty} \mu R_1(\mu) f = f\} = \{f \in R(P)^a : \lim_{\mu\to\infty} \mu R_{11}(\mu) f = f\} = R(P)^a.$$

Тоді в (21), враховуючи (15), маємо

$$R(R(\lambda))^a = N(P) \oplus R(P)^a = H.$$

Останнє означає, що $N(R(\lambda)) = \{0\}$ для будь-якого $\lambda > 0$. Тому за теоремою Іосіди про псевдорезольвенту [7, с. 300] $R(\lambda)$ є резольвентою деякого лінійного оператора A, причому

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad (22)$$

$R(R(\lambda))$ співпадає з областю значень цього оператора A. Згідно з відомою теоремою Хілле—Іосіди з нерівності (18) випливає, що A є інфінітезимальним оператором півгрупи стиснень в H. Покажемо, що $A = \Pi - (P + \Pi)^{-1}$. Для $f \in D(P)$, $\lambda > 0$ маємо

$$(P + \Pi) f = P(\lambda P + I)^{-1}(\lambda P + I) f + \Pi f = P(\lambda P + I)^{-1}(\lambda P + I) f +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\Pi(\lambda P + I) f + \frac{\lambda - 1}{\lambda}\Pi f = \left[P(\lambda P + I)^{-1} + \frac{1}{\lambda}\Pi\right](\lambda P + I) f + \frac{\lambda - 1}{\lambda}\Pi f =$$

$$= \left[P(\lambda P + I)^{-1} + \frac{1}{\lambda}\Pi\right](\lambda P + I) f + (\lambda - 1)\left[P(\lambda P + I)^{-1} + \frac{1}{\lambda}\Pi\right]\Pi f =$$

$$= R(\lambda)[\lambda(P + \Pi) + I - \Pi] f.$$

Таким чином,

$$(P + \Pi) f = R(\lambda)[\lambda(P + \Pi) + I - \Pi] f.$$

Звідси, поклавши $(P + \Pi) f = g$ і враховуючи лему, знаходимо

$$R^{-1}(\lambda) g = [\lambda(P + \Pi) + I - \Pi](P + \Pi)^{-1} g =$$

$$= [\lambda I + (P + \Pi)^{-1} - \Pi(P + \Pi)^{-1}] g. \quad (23)$$

Але $\Pi(P + \Pi)^{-1} g = \Pi g$, бо коли $f = (P + \Pi)^{-1} g$, то $\Pi f = \Pi(P + \Pi)^{-1} g = \Pi g$. Таким чином, із (23) одержуємо $R^{-1}(\lambda) = \lambda I - [\Pi - (P + \Pi)]^{-1}$ і, остаточно,

$$R(\lambda) = [\lambda I - (\Pi - (P + \Pi)^{-1})]^{-1}. \quad (24)$$

Порівнюючи (24) і (22) і враховуючи єдиність зображення (22), робимо висновок, що

$$A = \Pi - (P + \Pi)^{-1}. \quad (25)$$

Теорему доведено.

3. Зв'язок між узагальненими абстрактними потенціальними та інфінітезимальними операторами. Наведемо формулу, що подає (узагальнений) абстрактний потенціальний оператор в термінах відповідної півгрупи.

Нехай S_t, $t \geqslant 0$, півгрупа, що відповідає інфінітезимальному оператору A вигляду (25).

Відомо, що для $f \in D(A)$ і $\lambda > 0$ маємо $R(\lambda) f = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} S_t f dt$, або, враховуючи (16)

$$P(\lambda P + I)^{-1} f + \frac{1}{\lambda} \Pi f = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} S_t f dt. \tag{26}$$

Помножимо обидві частини рівності (26) зліва на ортопроектор $I - \Pi$:

$$(I - \Pi) P (\lambda P + I)^{-1} f = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} (I - \Pi) S_t f dt. \tag{27}$$

Переходячи до границі при $\lambda \downarrow 0$ і враховуючи, що $(I - \Pi) Pf = Pf$, одержуємо

$$Pf = \int\limits_0^\infty (I - \Pi) S_t f dt. \tag{28}$$

Позначимо через $\mathfrak{P}$ множину всіх узагальнених абстрактних потенціальних операторів у розумінні означення 2.

Теорема 3. *Нехай $P \in \mathfrak{P}$. Тоді P є інфінітезимальним оператором півгрупи класу (C_0) операторів стиснення в H.*

Дійсно, оператор $-P$ є замкненим, щільно визначеним оператором і тому за теоремою Хілле—Іосіди вимагається лише показати, що $\|\lambda(\lambda I + P)^{-1}\| \leqslant 1$. Але в силу акретивності P має місце нерівність

$$\left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda I + P) f \right\|^2 = \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda} Pf, f\right) + \left\| \frac{1}{\lambda} Pf \right\|^2 \geqslant \|f\|^2,$$

звідки і маємо бажане.

Навпаки, якщо A — інфінітезимальний оператор півгрупи класу (C_0) операторів стиснення в H, то оператор $-A$ є щільно визначеним і акретивним, бо якщо S_t — відповідна півгрупа і $f \in D(A)$, то $\operatorname{Re}(S_t f, f) \leqslant \|f\|^2$, і

$$\operatorname{Re}(-Af, f) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \operatorname{Re}((I - S_t) f, f) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \operatorname{Re}((I - S_t) f, f) \geqslant 0.$$

Якщо до того ж $N(A) \oplus R(A)^a = H$, то оператор A є (узагальненим) абстрактним потенціальним оператором в розумінні означення 2.

Теорема 3 є аналогом одержаного К. Сато [8] твердження про «збіг з точністю до знака» множини абстрактних потенціальних операторів в розумінні Іосіди з множиною інфінітезимальних операторів півгрупи класу (C_0) операторів стиснення в гільбертовому просторі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Yosida K. Functional Analysis, The third ed. Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1971. 468 p.
2. Yosida K. Abstrakt potential operators on Hilbert space.— Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1972, 8, pp. 201—205.
3. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1970. 430 с.
4. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. М., «Мир», 1972. 740 с.
5. Ben-Israel A., Charnes A. Contributions to the thery of generalized inverses.— J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1963, 11, N 3, pp. 667—699.
6. Турбин А. Ф. Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 3, с. 772—776.
7. Иосида К. Функциональный анализ. М., «Мир», М., 1967. 624 с.
8. Sato Ken-iti, A note on infinitesimal generators and potential operators of contraction semi—groups.— Proc. Japan. Acad., 1972, 48, N 7, pp. 450—453.

Інститут математики
АН УРСР

Надійшла до редакції
20.I 1977 р.