УДК 513.881

Ю. В. Богданский

Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами

1. Пусть H — сепарабельное бесконечномерное вещественное гильбертово пространство; $B_c(H)$ — банахово пространство самосопряженных ограниченных операторов на H с естественной нормой.

Линейный неотрицательный функционал α, определенный на замкнутом линейном подпространстве $D_\alpha \subset B_c(H)$, содержащем единичный и все вырожденные операторы, и такой, что $\alpha(A) = 0$ для любого вырожденного оператора A, назовем существенно бесконечномерным. Множество всех существенно бесконечномерных положительных линейных функционалов обозначим через $B'_c(H)$.

Пусть G—некоторая область в H. Пусть $l: G \to B'_c(H)$. Тогда на пространстве дважды дифференцируемых по Фреше в области G функций, гессианы которых u''_x лежат в $D_{l(x)}$ при каждом $x \in G$, можнс определить дифференциальный оператор L следующим образом: $(Lu)(x) = \frac{1}{2} l(x)(u''_x)$ для каждого $x \in G$.

Так определенный оператор естественно назвать существенно бесконечномерным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка.

Различные примеры существенно бесконечномерных эллиптических операторов можно найти в работах [1—7].

Во всех этих примерах функционалы $l(x)$, определяющие оператор L, нормированны: $\|l(x)\| = l(x)(E) \equiv 1$.

Из теоремы М. Г. Крейна (см., например, [8, с. 86]) вытекает существование существенно бесконечномерного эллиптического оператора, определенного на пространстве всех дважды дифференцируемых функций в области G.

Если $\|l(x)\| \equiv 1$ и G — ограниченная область в H, то замыкания существенно бесконечномерных эллиптических операторов существуют и являются операторами псевдосферического дифференцирования [9].

2. Построим класс функций, расширяющий шиловский [2—4].

Пусть $\mathfrak{M}_L = \bigcap_{x \in G} D_{l(x)}$ — пересечение областей определения функционалов $l(x)$. Для каждой последовательности самосопряженных ограниченных операторов $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что $B_k \in \mathfrak{M}_L$ при каждом k и $\Sigma \|B_k\|^2 < \infty$, определим квадратичный оператор $\xi_{\{B_k\}}: G \to l_2$ по формуле

$$\xi_{\{B_k\}} x = ((B_1 x, x), (B_2 x, x), \ldots). \tag{1}$$

Функцию вида

$$\varphi(x) = f(Tx, \xi_{\{B_k\}} x), \tag{2}$$

где T — вполне непрерывный оператор на H, а $f(u, v)$ определена, непрерывна на $H \times l_2$ и имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно, назовем $C^k Ш$-функцией, связанной с оператором L, или просто $C^k Ш$-функцией, если ясно, о каком операторе идет речь.

Предложение 1. *Класс $C^k Ш$-функций, связанных с данным оператором L, является алгеброй.*

Доказательство базируется на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть T_1 и T_2 — вполне непрерывные операторы на H. Тогда существуют вполне непрерывный оператор T и ограниченные линейные операторы A_1 и A_2 такие, что $T_k = A_k T$* при $k = 1, 2$.

Действие оператора L на $C^2 Ш$-функцию φ сводится к действию дифференциального оператора первого порядка на функцию f:

$$(L\varphi)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial v} \bigg|_{u=Tx, v=\xi_{\{B_k\}}x}, \ \tau_{\{B_k\}}(x) \right),$$

где $\tau_{\{B_k\}}(x) = (l(x)(B_1), \ l(x)(B_2), \ldots) \in l_2$.

3. Пусть Γ — граница области G; $C = G \times (0, T)$ — открытый цилиндр с основанием G высоты T; $\overline{C} = \overline{G} \times [0, T]$; S — объдинение нижнего основания $\overline{G} \times \{0\}$ и боковой поверхности $\Gamma \times [0, T]$ цилиндра $\overline{C}$.

Пусть $l : C \to B_c'(H)$. Тогда на пространстве $\Omega_l(C)$, определенных в $\overline{C}$, дважды дифференцируемых по x, дифференцируемых по t в C функций, гессианы по x которых $u_x''(x, t)$ лежат в $D_{l(x,t)}$ при каждом $(x, t) \in C$, можно определить существенно бесконечномерный эллиптический оператор по x по формуле $(L_x u)(x, t) = \frac{1}{2} l(x, t)(u_x'')$.

Для функции $u(x, t) \in \Omega_l(C)$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L_x u(x, t). \tag{3}$$

а) Пусть G — ограничена.

Для уравнения (3) поставим краевую задачу

$$u(x, t)\,|_{(x,t) \in S} = \varphi(x, t). \tag{4}$$

Пусть $\Omega(C) \subset \Omega_l(C)$ — класс непрерывных в $\overline{C}$, дважды непрерывно дифференцируемых по x в C функций, обладающих непрерывной в C производной $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Теорема 1. *В классе функций $\Omega(C)$ задача* (3) — (4) *имеет не более одного решения.*

б) Пусть $G = H$.

Для уравнения (3) поставим задачу Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{5}$$

Пусть $\Omega \subset \Omega_l(C)$ — класс непрерывных в $\bar{C}$, дважды непрерывно дифференцируемых по x, непрерывно дифференцируемых по t в C функций, ограниченных на каждом ограниченном подмножестве пространства $\overline{C}$.

Теорема 2. *Пусть функция $\|l(x, t)\|$ непрерывна и ограничена на C. Тогда задача Коши* (3) — (5) *в классе функций Ω имеет не более одного решения.*

Подобные теоремы, но для других операторов, были рассмотрены в [10, 11 и 7].

Решение поставленной задачи Коши обладает ограниченной областью зависимости от начального условия.

Теорема 3. *Пусть функция* $\| l(x, t) \|$ *непрерывна на* C;

$$\sup_{(x,t)\in C} \| l(x, t) \| = a < \infty, \quad \inf_{(x,t)\in C} \| l(x, t) \| = b.$$

Пусть $u(x, t) \in \Omega$ — *решение задачи Коши* (3)—(5). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *и для любых* $x_0 \in H$, $t_0 \in [0, T]$ *справедливы неравенства*

$$\inf_{x\in K_\varepsilon} u(x, 0) \leqslant u(x_0, t_0) \leqslant \sup_{x\in K_\varepsilon} u(x, 0),$$

где $K_\varepsilon = \{x \mid bt_0 - \varepsilon \leqslant \| x - x_0 \|^2 \leqslant at_0 + \varepsilon\}$.

В частности, если $a = b$, т. е. $\| l(x, t) \| \equiv a$ на C, то K_ε представляет собой ε-окрестность сферы радиуса $\sqrt{at_0}$. В этом случае результат теоремы 3 может быть усилен.

Пусть $S'(x_0, R)$ — подсфера конечной коразмерности радиуса R с центром в $x_0 \in H$, т. е. $S'(x_0, R) = \{x \mid \| x - x_0 \| = R\} \cap \pi_{x_0}$, где π_{x_0} — гиперплоскость конечной коразмерности, содержащая x_0.

Теорема 4. *Пусть* $\| l(x, t) \| \equiv a < \infty$ *всюду на* C. *Пусть* $u(x, t) \in \Omega$ — *решение задачи* (3) — (5). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *и для любых* $x_0 \in H$ *и* $t_0 \in [0, T]$ *справедливы неравенства*

$$\inf_{x\in L_\varepsilon} u(x, 0) \leqslant u(x_0, t_0) \leqslant \sup_{x\in L_\varepsilon} u(x, 0),$$

где L_ε — *ε-окрестность подсферы конечной коразмерности* $S'(x_0, \sqrt{at_0})$.

В том случае, когда начальное условие $u(x, 0)$ задачи (3) — (5) равномерно непрерывно на ограниченных множествах пространства H, результаты теорем 3 и 4 можно усилить: ε можно считать равным нулю. В частности, справедливо следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и начальное условие* $u(x, 0)$ *равномерно непрерывно на любом ограниченном подмножестве пространства* H. *Тогда для любого* $x_0 \in H$ *и* $t_0 \in [0, T]$ *справедливы неравенства:*

$$\inf_{x\in S'(x_0, \sqrt{at_0})} u(x, 0) \leqslant u(x_0, t_0) \leqslant \sup_{x\in S'(x_0, \sqrt{at_0})} u(x, 0)$$

Иными словами, в этом случае решение $u(x, t)$ задачи Коши (3) — (5) представляет собой некоторое среднее начального условия $u(y, 0)$ по подсфере $S'(x, \sqrt{at})$.

Представляет интерес также следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $\| l(x, t) \|$ *непрерывна и ограничена на* C; $\inf_{(x,t)\in C} \| l(x, t) \| = b > 0$; $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — *решения задачи* (3)—(5), *лежащие в классе* Ω, *начальные условия которых* $u_1(x, 0)$ *и* $u_2(x, 0)$ *совпадают вне ограниченного множества диаметра* d. *Тогда для любого* $x \in H$ *и* $t > d^2/2b$ $u_1(x, t) = u_2(x, t)$.

4. Приведем достаточные условия существования решения задачи Коши (3) — (5).

Пусть l_1 — дважды непрерывно дифференцируемое отображение гильбертового пространства $Y = H \times l_2 \times \mathbf{R}^1$ в $B'_c(H)$ (точнее, в некоторое подмножество $B'_c(H)$, в котором можно ввести структуру линейного нормированного пространства). Пусть l_1 — равномерно ограничено вместе с первой производной на всем пространстве Y: $\| l_1^{(k)}(y) \| < C_k$ при $y \in Y$ и $k = 0, 1$.

Пусть T — вполне непрерывный оператор на H, а ξ—квадратичный оператор из H в l_2, определенный формулой (1), и такой, что $B_k \in \bigcap_{y\in Y} D_{l_1(y)}$ и $\Sigma \| B_k \|^2 < \infty$. Будем рассматривать отображения $l: H \times \mathbf{R}^1 \to B'_c(H)$, которые можно задать формулой $l(x, t) = l_1(Tx, \xi x, t)$.

Классическим методом характеристик (бесконечномерный случай см. [1, 12]) доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 6. *Задача Коши (3) — (5) с оператором L, порожденным отображением l указанного выше вида, начальное условие которой является $C^2Ш$-функцией, разрешима на $H \times [0, \infty)$.*

Если при этом функция f, определяющая $\varphi(x)$ по формуле (2), ограничена на каждом ограниченном подмножестве пространства $H \times l_2$, то решение $u(x, t)$ лежит в классе Ω.

З а м е ч а н и е 1. Для квазилинейного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} l(x, t, u)(u''_x)$ можно привести, по аналогии с теоремой 6, достаточное условие разрешимости задачи Коши при малых t.

З а м е ч а н и е 2. Результаты приведенной работы обобщаются на случай уравнения с добавкой:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_x u + (b(x, t), u'_x) + c(x, t)u + f(x, t).$$

Автор благодарен Ю. Л. Далецкому за постоянное внимание и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и П. Конкретные проблемы функционального анализа. М., «Наука», 1967. 512 с.
2. Ш и л о в Г. Е. О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. 1.— Функциональный анализ и его приложения, 1967, **1**, вып. 2, с. 81—90.
3. Ш и л о в Г. Е. О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. 2.— Мат. исследования, 1967, **2**, № 4, с. 166—186.
4. Ш и л о в Г. Е. О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. 3.— Мат. сб., 1967, **74**, № 1, с. 161—168.
5. Н е м и р о в с к и й А. С., Ш и л о в Г. Е. Об аксиоматическом описании оператора Лапласа для функций на гильбертовом пространстве. — Функциональный анализ и его приложения, 1969, **3**, вып. 3, с. 79—85.
6. Д о р ф м а н И. Я. О средних и лапласиане функций на гильбертовом пространстве. — Мат. сб., 1970, **81**, № 2, с. 192—208.
7. Б о г д а н с к и й Ю. В. Об одном классе дифференциальных операторов второго порядка для функций бесконечномерного аргумента. — Допов. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 1, с. 6—9.
8. Н а й м а р к М. А. Нормированные кольца. М., «Наука», 1968. 664 с.
9. С и к и р я в ы й В. Я. Оператор квазидифференцирования и связанные с ним краевые задачи. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1972, **27**, с. 195—246.
10. П о л и щ у к Е. М. О функциональных аналогах уравнения теплопроводности. — Сиб. мат. журн., 1965, **6**, № 6, с. 1322—1331.
11. Д о р ф м а н И. Я. Об уравнении теплопроводности на гильбертовом пространстве.— Вестник МГУ, 1971, № 4, с. 46—51.
12. Д а л е ц к и й Ю. Л., К у х а р ч у к Н. М. Уравнения первого порядка с функциональными производными. — УМЖ, 1965, **17**, № 6, с. 114—117.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
27.IV. 1976 г.

УДК 519.21

Н. С. Б р а т и й ч у к, Б. П и р д ж а н о в

Потенциал и резольвента решетчатого случайного блуждания

Цель данной статьи — распространение метода, разработанного В. С. Королюком и подробно изложенного в [1], на более общие типы случайных блужданий. Для блуждания, удовлетворяющего условию Крамера при некоторых дополнительных предложениях на производящую функцию, построены резольвента и потенциал, а также их асимптотические представления, полезные при исследовании предельного поведения граничных функционалов.