УДК 517.51

В. П. Бугаец, В. Т. Мартынюк

Точная константа приближения непрерывных функций сумматорными операторами типа Джексона

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \max\limits_x |f(x)|$ и $U_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность линейных полиноминальных операторов, действующих из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$. В теории приближений важную роль играет величина

$$\sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\|f - U_n(f)\|}{\omega(f; \alpha_n)}, \tag{1}$$

где α_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность положительных чисел таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\omega(f; \alpha_n) = \sup\limits_{|x_1 - x_2| \leqslant \alpha_n} |f(x_1) - f(x_2)|$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

В случае, когда $U_n(f)$ — последовательность сумм Фавара и $\alpha_n = \dfrac{\pi}{n}$, величина (1) найдена в работе [1]. Если $U_n(f)$ — последовательность операторов Джексона, то для $\alpha_n = \dfrac{\pi}{n+1}$ величина (1) найдена в работе [2], а для $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$ — в работе [3]. Для случая интерполяционных сумм Рогозинского величина вида (1) получена в работе [4].

В данной заметке рассматривается аналогичная задача для случая сумматорных операторов типа Джексона.

Для каждого натурального числа n определим семейство Λ_n наборов из $2n+1$ точек $\{x_k^{(n)}\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$ отрезка $[-\pi, \pi]$ таких, что

$$-\pi \leqslant x_{-n}^{(n)} < x_{-n+1}^{(n)} < \ldots < x_{-1}^{(n)} < x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant \pi$$

и

$$x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1), n). \tag{2}$$

Очевидно, что $-\dfrac{\pi}{2n+1} \leqslant x_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2n+1}$.

Сумматорный оператор типа Джексона определяется на $C_{2\pi}$ равенством

$$D_n(f; \{x_k^{(n)}\}; x) = B_n \sum_{k=-n}^{n} f(x_k^{(n)}) A_n(x - x_k^{(n)}), \tag{3}$$

где

$$B_n = \frac{3}{n(2n+1)(2n^2+1)}, \quad A_n(t) = \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t}\right)^4.$$

Наша задача — нахождение величины

$$\sup_{n=1,2,\ldots} \inf_{\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n} \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\|f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\})\|}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)}. \tag{4}$$

Заметим, прежде всего, что для любого набора $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются тождественно по x равенства

$$D_n(1; \{x_k^{(n)}\}; x) = 1. \tag{5}$$

Действительно, в силу равенств (см. [5, с. 43])

$$\sum_{k=-n}^{n} \cos m x_k^{(n)} = \sum_{k=-n}^{n} \sin m x_k^{(n)} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, 2n),$$

как и в [6, с. 564], убеждаемся в справедливости (5).

Легко убедиться также, что существует абсолютная постоянная $M > 0$ такая, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ выполняются неравенства

$$\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \| \leqslant M\omega\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

Следовательно, величина (4) существует.

Пусть n и $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ фиксированы. Если

$$\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \| = | f(x_0) - D_n(f; \{x_k^{(n)}\}; x_0) |,$$

то для функции $f_1(x) = f(x + x_0)$ имеем $\omega(f_1; t) = \omega(f; t)$ $(t \geqslant 0)$ и

$$\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \| = \left| f_1(0) - B_n \sum_{k=-n}^{n} f_1(x_k^{(n)} - x_0) A_n(x_0 - x_k^{(n)}) \right| =$$

$$= \left| f_1(0) - B_n \sum_{k=-n}^{n} f_1(u_k^{(n)}) A_n(u_k^{(n)}) \right| = | f_1(0) - D_n(f_1; \{u_k^{(n)}\}; 0) |,$$

где $\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$.

Таким образом, каковы бы ни были функция $f \in C_{2\pi}$ и набор точек $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$, существуют функции $f_1 \in C_{2\pi}$ и $\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ такие, что для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \|}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = \frac{| f_1(0) - D_n(f_1; \{u_k^{(n)}\}; 0) |}{\omega\left(f_1; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)}.$$

Далее, если $f_1 \in C_{2\pi}$, то и $f_2(x) = f_1(0) - f_1(x)$ также из $C_{2\pi}$. Поэтому, учитывая линейность и положительность операторов (3), равенство (5) и равенство

$$\omega\left(f_1; \frac{2\pi}{2n+1}\right) = \omega\left(f_2; \frac{2\pi}{2n+1}\right),$$

имеем

$$\frac{| f_1(0) - D_n(f_1; \{u_k^{(n)}\}; 0) |}{\omega\left(f_1; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = \frac{| D_n(f_2; \{u_k^{(n)}\}; 0) |}{\omega\left(f_2; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)}.$$

Таким образом, какие бы ни были функция $f \in C_{2\pi}$ и набор точек $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$, существует функция $f_2 \in C_{2\pi}$, для которой $f_2(0) = 0$, и $\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ такие, что для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \|}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = \frac{| D_n(f_2; \{u_k^{(n)}\}; 0) |}{\omega\left(f_2; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)}.$$

Поэтому

$$\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\})\|}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = \sup_{\substack{f\in \widetilde{C}_{2\pi}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{D_n(f; \{u_k^{(n)}\}; 0)}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)}, \tag{6}$$

где $\widetilde{C}_{2\pi} = \{f(x): f\in C_{2\pi};\ f(0)=0\}$.

Пусть теперь

$$\widetilde{\widetilde{C}}_{2\pi} = \left\{f(x): f\in \widetilde{C}_{2\pi},\ \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right)=1\right\}.$$

Если $f\in\widetilde{C}_{2\pi}$, то $f_3(x) = \omega^{-1}\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right) f(x) \in \widetilde{\widetilde{C}}_{2\pi}$ и имеем

$$\sup_{\substack{f\in \widetilde{C}_{2\pi}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{D_n(f; \{u_k^{(n)}\}; 0)}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = \sup_{f\in\widetilde{\widetilde{C}}_{2\pi}} D_n(f; \{u_k^{(n)}\}; 0).$$

Следовательно, учитывая (6), для каждого набора точек $\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n$ существует такой набор точек $\{u_k^{(n)}\}\in\Lambda_n$, что

$$\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\})\|}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = \sup_{f\in\widetilde{\widetilde{C}}_{2\pi}} D_n(f; \{u_k^{(n)}\}; 0). \tag{7}$$

Для $n = 1, 2, \ldots$ и положительного $\varepsilon \left(\varepsilon < \dfrac{\pi}{2n+1}\right)$ определим четные функции $f_{n,\varepsilon}(x)$ класса $\widetilde{\widetilde{C}}_{2\pi}$ с помощью соотношений

$$f_{n,\varepsilon}(x) = \begin{cases} k + \dfrac{1}{\varepsilon}\left(x - \dfrac{2k\pi}{2n+1}\right), & \text{если } \dfrac{2k\pi}{2n+1} \leqslant x \leqslant \dfrac{2k\pi}{2n+1} + \varepsilon, \\ k+1, & \text{если } \dfrac{2k\pi}{2n+1} + \varepsilon \leqslant x \leqslant \dfrac{2(k+1)\pi}{2n+1}, \\ & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ n + \dfrac{1}{\varepsilon}\left(x - \dfrac{2n\pi}{2n+1}\right), & \text{если } \dfrac{2n\pi}{2n+1} \leqslant x \leqslant \dfrac{2n\pi}{2n+1} + \varepsilon, \\ n+1, & \text{если } \dfrac{2n\pi}{2n+1} + \varepsilon \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого аналогичное доказательству леммы 1 из [3] для случая функций двух переменных.

Л е м м а. *Какова бы ни была функция* $f\in\widetilde{C}_{2\pi}$, *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* x *справедливо неравенство*

$$|f(x)| \leqslant f_{n,\varepsilon}(x).$$

В силу леммы, из (7) получаем

$$\sup_{\substack{f\in C_{2\pi}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\})\|}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = \sup_{\varepsilon>0} D_n(f_{n,\varepsilon}; \{u_k^{(n)}\}; 0) = D_n(f_n; \{u_k^{(n)}\}; 0),$$

где $f_n(x)$ — четная 2π-периодическая функция, определенная на $[0, \pi]$ соотношениями

$$f_n(x) = \begin{cases} k+1, \text{ если } \dfrac{2k\pi}{2n+1} \leqslant x \leqslant \dfrac{2(k+1)\pi}{2n+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \\ n+1, \text{ если } \dfrac{2n\pi}{2n+1} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, какой бы ни был набор $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$, существует $\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ такой, что

$$\sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \text{const}}} \frac{\| f - D_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \|}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = D_n(f_n; \{u_k^{(n)}\}; 0). \tag{9}$$

Так как $u_0^{(n)} \in \left[-\dfrac{\pi}{2n+1}, \dfrac{\pi}{2n+1}\right]$, то предположим, что $0 \leqslant u_0^{(n)} \leqslant \dfrac{\pi}{2n+1}$ $\left(\text{случай } -\dfrac{\pi}{2n+1} \leqslant u_0^{(n)} < 0 \text{ рассматривается аналогично}\right)$.

Учитывая (5) и (8), имеем

$$D_n(f_n; \{u_k^{(n)}\}; 0) = 1 + B_n \left[\sum_{k=1}^{n} kA_n(u_k^{(n)}) + \sum_{k=1}^{n} (k-1) A_n(u_{-k}^{(n)})\right]. \tag{10}$$

Отсюда, для произвольного набора $\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$, имеем

$$D_1(f_1; \{u_k^{(1)}\}; 0) = \frac{4}{3}.$$

Далее, учитывая неравенства

$$\frac{2k\pi}{2n+1} \leqslant u_k^{(n)} \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}, \quad \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} \leqslant |u_{-k}^{(n)}| \leqslant \frac{2k\pi}{2n+1} \tag{11}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

из (10) получаем

$$D_2(f_2; \{u_k^{(2)}\}; 0) = 1 + \frac{8}{15}\left[\cos^4 \frac{u_1^{(2)}}{2} + 2\cos^4 \frac{u_2^{(2)}}{2} + \cos^4 \frac{u_{-2}^{(2)}}{2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{8}{15}\left(\cos^4 \frac{\pi}{5} + 2\cos^4 \frac{2\pi}{5} + \cos^4 \frac{3\pi}{10}\right)$$

и после непосредственных подсчетов находим

$$D_2(f_2; \{u_k^{(2)}\}; 0) < \frac{4}{3}.$$

Аналогично, учитывая (11), из (10), после непосредственных подсчетов, получаем

$$D_n(f_n; \{u_k^{(n)}\}; 0) < \frac{4}{3} \quad (n = 3, 4, 5, 6).$$

Пусть теперь $n \geqslant 7$. Так как функция $\dfrac{x}{\sin x}$ возрастает для $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то, учитывая (11),

$$B_n \left[\sum_{k=1}^{3} kA_n(u_k^{(n)}) + \sum_{k=1}^{4} (k-1) A_n(u_{-k}^{(n)})\right] \leqslant$$

$$\leqslant B_n \left\{ \sum_{k=1}^{3} \frac{k}{\left[\frac{1}{2} u_k^{(n)}\right]^4} \left[\frac{\frac{1}{2} u_k^{(n)}}{\sin \frac{1}{2} u_k^{(n)}} \right]^4 + \sum_{k=2}^{4} \frac{k-1}{\left[\frac{1}{2} u_{-k}^{(n)}\right]^4} \left[\frac{\frac{1}{2} u_{-k}^{(n)}}{\sin \frac{1}{2} u_{-k}^{(n)}} \right]^4 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant B_n \left\{ \sum_{k=1}^{3} \frac{k}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^4} \left[\frac{\frac{(2k+1)\pi}{30}}{\sin \frac{(2k+1)\pi}{30}} \right]^4 + \sum_{k=2}^{4} \frac{k-1}{\left[\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}\right]^4} \left(\frac{\frac{k\pi}{15}}{\sin \frac{k\pi}{15}} \right)^4 \right\} =$$

$$= B_n (2n+1)^4 \left\{ \sum_{k=1}^{3} \frac{(2k+1)^4}{k^3} \left[30 \sin \frac{(2k+1)\pi}{30} \right]^{-4} + \right.$$

$$\left. + 16 \sum_{k=1}^{3} \frac{k(k+1)}{(2k+1)^4} \left[15 \sin \frac{(k+1)\pi}{15} \right]^{-4} \right\} < 3 \left(4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{2n^2+1} \right) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{3} \frac{(2k+1)^4}{k^3} \left[30 \sin \frac{(2k+1)\pi}{30} \right]^{-4} + \right.$$

$$\left. + 16 \sum_{k=1}^{3} \frac{k(k+1)^4}{(2k+1)^4} \left[15 \sin \frac{(k+1)\pi}{15} \right]^{-4} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 3 \left(4 + \frac{6}{7} + \frac{2}{99} \right) \left\{ \sum_{k=1}^{3} \frac{(2k+1)^4}{k^3} \left[30 \sin \frac{(2k+1)\pi}{30} \right]^{-4} + \right.$$

$$\left. + 16 \sum_{k=1}^{3} \frac{k(k+1)^4}{(2k+1)^4} \left[15 \sin \frac{(k+1)\pi}{15} \right]^{-4} \right\} = S_1.$$

Результат вычислений S_1 на ЭЦВМ «Мир» с точностью до 7 десятичных знаков дает:

$$S_1 = 0{,}2393253\ldots. \tag{12}$$

Далее, в силу (11) и неравенства $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$

$$B_n \left| \sum_{k=4}^{n} k A_n (u_k^{(n)}) + \sum_{k=5}^{n} (k-1) A_n (u_{-k}^{(n)}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant B_n \left[\sum_{k=4}^{n} \frac{k}{\left[\frac{1}{\pi} u_k^{(n)}\right]^4} + \sum_{k=5}^{n} \frac{k-1}{\left[\frac{1}{\pi} u_{-k}^{(n)}\right]^4} \right] \leqslant B_n \left[\sum_{k=4}^{n} \frac{k}{\left(\frac{2k}{2n+1}\right)^4} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=5}^{n} \frac{k-1}{\left(\frac{2k-1}{2n+1}\right)^4} \right] = B_n (2n+1)^4 \left[\frac{1}{2^4} \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=5}^{n} \frac{k-1}{(2k-1)^4} \right] <$$

$$< 3 \left(4 + \frac{6}{7} + \frac{2}{99} \right) \left[\frac{1}{16} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)^4} \right] = S_2.$$

С помощью ЭЦВМ «Мир» с точностью до 7 десятичных знаков получено, что

$$S_2 = 0{,}0624322\ldots . \tag{13}$$

Из (10), учитывая (12) и (13), для произвольного набора $\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ для $n \geqslant 7$ имеем

$$D_n(f_n; \{u_k^{(n)}\}; 0) < 1 + S_1 + S_2 = 1{,}3017575\ldots < \frac{4}{3}.$$

Таким образом, каков бы ни был набор точек $\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$, имеем $D_1(f_1; \{u_k^{(1)}\}; 0) = \frac{4}{3}$, а для $n > 1$ $D_n(f_n; \{u_k^{(n)}\}; 0) < \frac{4}{3}$.

Отсюда, учитывая (9), получаем

$$\sup_{n=1,2,\ldots} \inf_{\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n} \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\| f - D_n(f; \{u_k^{(n)}\}) \|}{\omega\left(f; \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)} = \frac{4}{3}.$$

Следствие. *Если* $f(x) \in C_{2\pi}$, $\{u_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ *и* $D_n(f; \{u_k^{(n)}\}; x)$ *определяются равенством* (2), *то для всех* $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\| \;\; - D_n(f; \{u_k^{(n)}\}) \| \leqslant \frac{4}{3}\, \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

Постоянную $\frac{4}{3}$ уменьшить нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара. — Труды Мат. ин-та АН СССР, 1971, **109**, с. 26—34.
2. Wang Xing-hua (Wang Hsing-hua). The exact constant of approximation of continuons functions by the Jackson singular integral. — Chinese Math., 1964, **5**, N **2**, p. 254—260.
3. Бугаец В. П., Мартынюк В. Т. Точные константы приближения непрерывных функций интегралами Джексона. — УМЖ, 1974, **26**, № 4, с. 435—443.
4. Гаврилюк В. Т. Приближение непрерывных периодических функций одной и двух переменных полиномами Рогозинского интерполяционного типа. — УМЖ, 1973, **25**, № 5, с. 637—648.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1971. 1100 с.
6. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М. — Л., Гостехиздат, 1949. 688 с.

Днепропетровский инженерно-строительный институт,
Черновицкий государственный университет

Поступила в редакцию
11.II. 1976 г.