УДК 519.21

Г. П. Буцан

Несколько замечаний к работе «Стохастические полугруппы»

Данная заметка является дополнением к работе [1], в гл. 4 которой предприняты два подхода к определению произведения независимых почти линейных сильных операторов (S-операторов). Ниже автор показывает, что эти два подхода, в случае гильбертова пространства, приводят к одному и тому же объекту. К сожалению, этот простой факт не мог быть своевременно внесен в работу [1], что способствовало бы упрощению в ней некоторых доказательств.

Ниже использованы обозначения, принятые в работе [1].

Теорема. *Пусть A_ω и B_ω — независимые s-операторы* (см. [1]). *Тогда $(A \circ B)_\omega$ также s-оператор.*

Доказательство. Рассмотрим обобщенную случайную величину ξ со значениями в H (см. [2]) и будем говорить, что определено $A_\omega(\xi)$, если при любом $x \in H$ в некотором фиксированном базисе $\{e_k\} \subset H$ сходится по вероятности ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi, e_k)(A_\omega(e_k), x) = A_\omega(\xi)(x).$$

Аналогично теореме 4.1 работы [1] можно показать, что если $A_\omega(\xi)$ определено, то случайная функция $A_\omega(\xi)(x)$ будет стохастически непрерывна по x на H.

Очевидно, что $A_\omega(\xi)$ является обобщенной случайной величиной (см. [2]) на H, хотя по аналогии с определением 4.2 работы [1] ее можно было бы рассматривать как «почти линейный функционал» над H.

Прежде всего нас интересует вопрос, когда $A_\omega(\xi)$ будет случайной величиной со значениями в H. Необходимое и достаточное условие для этого дает теорема Минлоса — Сазонова (см., например, [2]), утверждая, что характеристический функционал $\varphi(z) = M \exp\{iA_\omega(\xi)(z)\}$ величины $A_\omega(\xi)$ должен быть непрерывен в нуле по $z \in H$ в Σ-топологии.

Пусть теперь s-оператор A_ω и случайная величина ξ со значениями в H независимы*. Тогда легко видеть, что $A_\omega(\xi)$ является случайной величиной со значениями в H. Действительно, из соотношения

$$P\left\{\left|\sum_{k=n}^{n+m} (\xi, e_k)(A_\omega(e_k), x)\right| > \varepsilon\right\} = \int P\left\{\left|\sum_{k=n}^{n+m} (y, e_k)(A_\omega(e_k), x)\right| > \varepsilon\right\} P\{\xi \in dy\}$$

по теореме Лебега и условию S 2) работы [1, с. 147] вытекает, что $A_\omega(\xi)(x)$ определена при $x \in H$. Теперь из соотношения

$$M \exp\{i(A_\omega(\xi), z)\} = M \exp\left\{i \sum_{k=1}^{\infty} (\xi, e_k)(A_\omega(e_k), z)\right\} =$$

$$= M\left\{M\left\{\exp\left\{i \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k)(A_\omega(e_k), z)\right\}\right|_{y=\xi}\right\} = M\{M\{\exp\{i(A_\omega(y), z)\}|_{y=\xi}\}$$

по теореме Лебега и теореме Минлоса — Сазонова следует, что $A_\omega(\xi)$ можно рассматривать как случайную величину со значениями в H, так что при любом $x \in H$ $A_\omega(\xi)(x) = (A_\omega(\xi), x)$.

Пусть теперь заданы два независимых s-оператора A_ω и B_ω. Тогда при любом $x \in H$ $B_\omega(x)$ — случайная величина со значениями в H, не зависящая от A_ω, и, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (B_\omega(x), e_k)(A_\omega(e_k), y) = (A \circ B)_\omega(x, y)$ сходится по вероятности при любых $x, y \in H$. Это означает согласно определению 4.5 работы [1], что произведение $(A \circ B)_\omega$ определено как w-оператор, а $A_\omega(B_\omega(x))$ — случайная величина со значениями в H, удовлетворяющая условию S 1) по x (см. [1, с. 147]). Теперь из соотношения

$$P\left\{\sum_{k=n}^{n+m} (A_\omega(B_\omega(x)), e_k)^2 > \varepsilon\right\} = \int P\left\{\sum_{k=n}^{n+m} (A_\omega(y), e_k)^2 > \varepsilon\right\} P\{B_\omega(x) \in dy\}$$

---

* Т. е. для любых $x_i \in H$, $i = \overline{1, n}$, $n = \overline{1, \infty}$, случайная величина ξ не зависит от совокупности случайных величин $\{A_\omega(x_i)\}$, $i = \overline{1, n}$.

по теореме Лебега вытекает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(A_\omega(B_\omega(x)), e_k)^2$ сходится по вероятности, а следовательно, и с вероятностью 1, так как состоит из неотрицательных членов. Поэтому, в силу теоремы 4.4 работы [1], $(A\circ B)_\omega$ будет s-оператором.

Следствие 1. *Если A_ω и B_ω — независимые S-операторы, то $(A\circ B)_\omega$ также S-оператор и* $|(A\circ B)_\omega| \leqslant |A_\omega|_5 \, |B_\omega|_5$.

Доказательство вытекает из неравенства

$$|(A\circ B)_\omega|_5^2 = \sup_{|x|_1\leqslant 1} M\,|A_\omega(B_\omega(x))|_1^2 = \sup_{|x|_1\leqslant 1} M\,\{M\,\{\,|A_\omega(y)|_1^2\}\big|_{y=B_\omega(x)}\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|x|_1\leqslant 1} M\,\{\,|A_\omega|_5^2\,|y|_1^2\big|_{y=B_\omega(x)}\} \leqslant |A_\omega|_5^2\,|B_\omega|_5^2.$$

Замечание 1. В случае независимых S-операторов A_ω и B_ω ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(B_\omega(x), e_k)(A_\omega\; e_k), y) = ((A\circ B)_\omega(x), y)$ сходится в среднеквадратичном равномерно по x и y на единичной сфере $S_1(0)\subset H$.

Действительно, по условию, выражения $M(B_\omega(x), y)^2$ и $M(A_\omega(y), x)^2$ — квадратичные формы по $y\in H$ при фиксированном $x\in H$. Поэтому $M(B_\omega(x), y)^2 = (B_x y, y)$, $M(A_\omega(y), x)^2 = (A^x y, y)$, где A^x — неотрицательный самосопряженный ограниченный оператор над H, а B_x — неотрицательный самосопряженный ядерный оператор над H, поскольку

$$\operatorname{Sp} B_x = \sum_{k=1}^{\infty}(B_x e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} M\,(B_\omega(x), e_k)^2 = M\,|B_\omega(x)|_2^2 \leqslant |B_\omega|_5^2\,|x|_1^2 < \infty.$$

Теперь в силу известных теорем из [3], справедливо соотношение

$$M\left[\sum_{k=n}^{n+m}(B_\omega(x), e_k)(A_\omega(e_k), y)\right]^2 = \sum_{i,j=n}^{n=m} M\,(B_\omega(x), e_i)(B_\omega(x), e_j)\times$$

$$\times M\,(A_\omega(e_i), y)(A_\omega(e_j), y) = \sum_{i,j=n}^{n+m}(B_x e_i, e_j)(A^y e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i=n}^{n+m}(P_n^{n+m}B_x e_i, P_n^{n+m}A^y e_i) = \sum_{i=n}^{n+m}(B_x P_n^{n+m}A^y e_i, e_j) =$$

$$= \operatorname{Sp} B_x P_n^{n+m}A^y = \operatorname{Sp} A^y B_x P_n^{n+m} \to 0, \quad n, m\to\infty,$$

где P_n^{n+m} — ортопроектор на пространство, порожденное $\{e_n, \ldots, e_{n+m}\}$. И, наконец,

$$\operatorname{Sp} A^y B_x \leqslant |A^y|_2 \operatorname{Sp} B_x \leqslant |x|_1\,|B_\omega|_5^2 \sup_{|z|_1\leqslant 1}(A^y z, z) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|z|_1\leqslant 1} M\,(A_\omega(z), y)^2\,|B_\omega|_5^2\,|x|_1^2 \leqslant |A_\omega|_5^2\,|B_\omega|_5^2\,|x|_1^2\,|y|_1^2.$$

Следствие 2. *Пусть $\{A_\omega^{(n)}\}$ и $\{B_\omega^{(n)}\}$ — две независимые последовательности S-операторов, сходящиеся в норме $|\cdot|_5$ к S-операторам A_ω и B_ω соответственно. Тогда последовательность S-операторов $\{(A^{(n)}\circ B^{(n)})_\omega\}$ также сходится в норме $|\cdot|_5$ и ее пределом будет S-оператор $(A\circ B)_\omega$.*

Доказательство вытекает из неравенства:

$$|(A\circ B)_\omega - (A^{(n)}\circ B^{(n)})_\omega|_5 \leqslant |A_\omega - A_\omega^{(n)}|_5\,|B_\omega|_5 + |A_\omega^{(n)}|_5\,|B_\omega - B_\omega^{(n)}|_5.$$

Замечание 2. Следствие 2 указывает на то, что рассмотренное в работе [1] произведение $(A \times B)_\omega$ независимых S-операторов A_ω и B_ω является частным случаем рассмотренного там же (и в этой статье) произведения $(A \circ B)_\omega$. Однако для общего банахова пространства H $(A \circ B)_\omega$, вообще говоря, не определено, в то время как $(A \times B)_\omega$ может существовать.

Следствие 3. *Если A_ω и B_ω — такие независимые S-операторы, для которых $M(A^* \circ A)_\omega$ или $M(B^* \circ B)_\omega$ — вполне непрерывный оператор, то оператор $M((A \circ B)^* \circ (A \circ B))_\omega = M(B^* \circ (M(A^* \circ A)_\omega) \circ B)_\omega$ также вполне непрерывен и $|(A \circ B)_\omega - ((A \circ P_n) \circ (B \circ P_n))_\omega|_5 \to 0$ при $n \to \infty$, где P_n обозначает ортопроектор на подпространство, порожденное $\{e_1, \ldots, e_n\}$, а $\{(A \circ P_n)_\omega\}$ и $\{(B \circ P_n)_\omega\}$ — конечномерные r-операторы.*

Доказательство вытекает из леммы 4.4 работы [1].

Замечание 3. Вопрос о том, возможно ли произвольный S-оператор аппроксимировать в норме $|\cdot|_5$ последовательностью r-операторов, вообще говоря не конечномерных, все еще остается открытым.

Замечание 4. Изложенный выше материал позволяет перенести на случай $X_s^2(H, \Omega)$ всех S-операторов теорию, построенную в первых трех главах работы [1], так же, как это было проделано в гл. 5 указанной работы для случая $\hat{X}_s^2(H, \Omega)$ и $\overline{X}^2(H, \Omega)$, поскольку $X_s^2(H, \Omega)$ замкнуто относительно операции предельного перехода в норме $|\cdot|_5$ и операции $(\circ)$-умножения своих независимых элементов. Различные вспомогательные равенства, необходимые для такого перенесения (см. [1, гл. 4]) элементарно доказываются с помощью замечания 1.

В заключение приведем еще одно замечание, упрощающее некоторые результаты работы [1].

Замечание 5. В [1] рассматривались M, (A)- и $\widetilde{M}$, $(\widetilde{A})$-полугруппы. Причем последние удовлетворяли более слабому условию непрерывности (в норме $|\cdot|_5$), чем первые (в норме $|\cdot|_4$). Однако, в силу того, что $\widetilde{M}$, $(\widetilde{A})$-полугруппы являются мартингалами и при любых значениях аргументов обладают конечной $|\cdot|_4$ нормой, они на самом деле представляют собой M, (A)-полугруппы.

Доказательство этого факта проведем для $\widetilde{M}$-полугрупп, поскольку для $\widetilde{A}$-полугрупп оно проводится аналогично.

Итак, пусть задана $\widetilde{M}$-полугруппа X_s^t, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$. По определению (см. [1]) при $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$ она удовлетворяет свойствам: $X_s^\tau X_\tau^t = X_s^t$, $X_\tau^\tau = E$, $MX_s^t = E$, σ-алгебры $\sigma_0^s = \sigma\{X_q^p,\ 0 \leqslant q \leqslant p \leqslant s\}$ и $\sigma_\tau^t = \sigma\{X_q^p,\ \tau \leqslant q \leqslant p \leqslant t\}$ независимы, $|X_s^t - E|_4 < \infty$, $|X_q^p - E|_5 \to 0$, $p - q \to 0$, $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant T < \infty$. Покажем, что в силу этих условий $|X_q^p - E|_4 \to 0$, $p - q \to 0$, $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant T < \infty$, т. е. X_s^t на самом деле является M-полугруппой. Для этого обозначим $M(X_s^t - E)^*(X_s^t - E) = Q_s^t$. В силу перечисленных условий Q_s^t является симметричным, неотрицательным ядерным оператором над H, кроме того, при $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant \sigma \leqslant t < \infty$, $x \in H$, справедливо равенство:

$$(Q_s^t x, x) = (M(X_s^t \mp X_\sigma^\tau - E)^*(X_s^t \mp X_\sigma^\tau - E)x, x) = (Q_\sigma^\tau x, x) +$$

$$+ (M(X_s^t - X_\sigma^\tau)^*(X_s^t - X_\sigma^\tau)x, x) - (M(X_s^\sigma X_\sigma^\tau X_\tau^t - X_\sigma^\tau)^*(X_\sigma^\tau - E)x, x) -$$

$$-(M(X_\sigma^\tau - E)^*(X_s^\sigma X_\sigma^\tau X_\tau^t - X_\sigma^\tau)x, x) =$$

$$= (Q_\sigma^\tau x, x) + (M(X_s^t - X_\sigma^\tau)^*(X_s^t - X_\sigma^\tau)x, x),$$

из которого вытекает, что $((Q_s^t - Q_\sigma^\tau)x, x) \geqslant 0$. Пусть теперь $\{e_k\}$, $k = \overline{1, \infty}$, — некоторый ортонормированный базис в H, тогда $|X_q^p - E|_4 = \operatorname{Sp} Q_q^p =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (Q_q^p e_k, e_k) \to 0$$ при $p - q \to 0$, $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant T < \infty$, поскольку каждый член последнего ряда не отрицателен и стремится к нулю монотонно.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить А. В. Скорохода за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буцан Г. П. Стохастические полугруппы. К., «Наук. думка», 1977. 215 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. I. М., «Наука», 1971. 664 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Г. Линейные операторы. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 25.XI. 1976 г.,
после переработки — 7.VI. 1977 г.