УДК 513:882

И. А. Гома

Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром

В работе рассматриваются следующие краевые задачи.

Задача 1. Найти такие значения параметра λ, при которых уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \tag{1}$$

имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \tag{2}$$

где $t \in [0, T]$, x, λ — элементы некоторого банахова пространства E.

Задача 2. Найти такие значения параметра λ, при которых уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \lambda\right) \tag{3}$$

имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям (2).

1. Сначала рассмотрим задачу (1).

Предположим, что выполнены условия.

1. Оператор $f(t, x, \lambda)$ определен, непрерывен по совокупности переменных в $Q = \{[0, T], \|x - x_0\| \leqslant R, \|\lambda\| \leqslant \rho\}$ и ограничен:

$$\int_0^T \|f(t, x, \lambda)\| \, dt \leqslant R. \tag{4}$$

Кроме того, удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, \bar{x}, \bar{\lambda})\| \leqslant \alpha(t) \| x - \bar{x} \| + \beta(t) \|\lambda - \bar{\lambda}\|. \tag{5}$$

2. Существует линейный ограниченный и непрерывно обратимый оператор B такой, что в Q выполняется условие

$$\left\| \int_0^T \{f(t, x, \lambda) - f(t, x, \bar{\lambda})\} \, dt - B(\lambda - \bar{\lambda}) \right\| \leqslant \varepsilon \|\lambda - \bar{\lambda}\|. \tag{6}$$

Для приближенного решения задачи (1), (2) построим последовательные приближения следующим образом:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - B^{-1}\left\{\int_0^T f(t, x_n(t), \lambda_n)\,dt - (x_T - x_0)\right\}, \tag{7}$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(\mu, x_n(\mu), \lambda_{n+1})\,d\mu, \tag{8}$$

где $x_0(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и

$$\| x_0(t) - x_0 \| \leqslant R, \quad \| \lambda_0 \| \leqslant \rho, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Исследование сходимости приближений (7), (8) опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть оператор* $V(\lambda)$ *определен при* $\|\lambda\| \leqslant \rho$ *со значениями из* E *и удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$\| \lambda - B^{-1}(V(\lambda) - \zeta) \| \leqslant \rho, \tag{9}$$

$$\| \lambda - \bar\lambda - B^{-1}(V(\lambda) - V(\bar\lambda)) \| \leqslant q \| \lambda - \bar\lambda \|, \tag{10}$$

где $\zeta \in E$ *— некоторый фиксированный элемент и* $0 < q < 1$.

Пусть последовательность операторов $\{V_n(\lambda)\}$ $(\|\lambda\| \leqslant \rho)$ *такова, что*

$$\| \lambda - B^{-1}(V_n(\lambda) - \zeta) \| \leqslant \rho, \tag{11}$$

$$\| V(\lambda) - V_n(\lambda) \| \leqslant K \frac{a^n}{n!}, \tag{12}$$

где K, a *— некоторые константы.*

Тогда итерационный процесс

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - B^{-1}(V_n(\lambda_n) - \zeta), \quad \| \lambda_0 \| \leqslant \rho, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

сходится к единственному решению λ^* $(\|\lambda^*\| \leqslant \rho)$ *уравнения*

$$V(\lambda) = \zeta \tag{14}$$

и имеет место оценка

$$\Delta_{n+1} = \| \lambda_{n+1} - \lambda_n \| \leqslant (1 + q)(2\rho + \| B^{-1} \| K e^{\frac{a}{q}})\, q^n. \tag{15}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$U(\lambda) = \lambda - B^{-1}(V(\lambda) - \zeta), \quad U_n(\lambda) = \lambda - B^{-1}(V_n(\lambda) - \zeta).$$

Тогда итерационный процесс (13) можно записать в виде

$$\lambda_{n+1} = U_n(\lambda_n).$$

Из (9), (10) следует, что оператор $U(\lambda)$ преобразует в себя шар $\|\lambda\| \leqslant \rho$ и является оператором сжатия с константой $q < 1$. Поэтому итерационный процесс $\tilde\lambda_{n+1} = U(\tilde\lambda_n)$ сходится к единственному решению λ^* уравнения $\lambda = U(\lambda)$, учитывая, что B — непрерывный оператор, λ^*—решение уравнения $V(\lambda) = \zeta$.

Теперь оценим $\delta_{n+1} = \| \lambda_{n+1} - \lambda^* \|$. Из (11), (12) имеем

$$\delta_{n+1} \leqslant \| U_n(\lambda_n) - U(\lambda_n) \| + \| U(\lambda_n) - U(\lambda^*) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| B^{-1} \| K \frac{a^n}{n!} + q\delta_n \leqslant q\left(q\delta_{n-1} + \| B^{-1} \| K \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \| B^{-1} \| K \frac{a^n}{n!} \leqslant$$

$$\leqslant q^{n+1}\delta_0 + \| B^{-1} \| K \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{n-i}a^i}{i!} \leqslant 2\rho q^{n+1} + \| B^{-1} \| K e^{\frac{a}{q}} q^n,$$

$$\delta_{n+1} \leqslant (2\rho + \| B^{-1} \| K e^{\frac{a}{q}}) q^n.$$

Так как $q < 1$, тогда $\delta_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $\{\lambda_{n+1}\}$ сходится к единственному решению λ^* уравнения $V(\lambda) = \zeta$.

Легко видеть, что справедлива оценка (15). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1, 2.

Пусть краевые условия и ε, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ *такие, что*

$$q = \| B^{-1} \| \left(\varepsilon + \int_0^T \beta(t) \left(e^{\int_t^T \alpha(u)du} - 1\right) dt \right) < 1, \tag{16}$$

$$\| B^{-1} \| (\| x_T - x_0 \| + C) \leqslant (1 - \varepsilon \| B^{-1} \|) \rho, \tag{17}$$

где $C = \max_Q \int_0^T \| f(t, x, 0) \| dt$.

Тогда последовательные приближения (7), (8) *сходятся к единственному решению* $(\lambda^*, x^*(t))$ *задачи* (1), (2) *со следующей скоростью*:

$$\| \lambda_{n+1} - \lambda^* \| \leqslant 2(\rho + \| B^{-1} \| R e^{\frac{a}{q}}) q^n, \tag{18}$$

$$\| x_{n+1}(t) - x^*(t) \| \leqslant 2R \frac{a^n}{n!} + 2 \int_0^T \beta(t)\, dt \,(\rho + \| B^{-1} \| R e^{\frac{a}{q}})\, e^{\frac{a}{q}} q^n. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть λ_n принадлежит шару $\| \lambda_n \| \leqslant \rho$ и $\| x_n(t) - x_0 \| \leqslant R$; тогда из (6) — (8), (4) легко доказать, что

$$\| \lambda_{n+1} \| \leqslant \rho \text{ и } \| x_{n+1}(t) - x_0 \| \leqslant R.$$

В силу условия (4), (5) задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad x(0) = x_0 \tag{20}$$

при каждом фиксированном λ $(\| \lambda \| \leqslant \rho)$ имеет единственное решение $x(t, \lambda)$, к которому сходятся последовательные приближения

$$x_{n+1}(t, \lambda) = x_0 + \int_0^t f(\mu, x_n(\mu, \lambda), \lambda)\, d\mu,$$

$$\| x_0(t) - x_0 \| \leqslant R, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

и имеет место оценка (см., например, [1])

$$\| x_n(t, \lambda) - x(t, \lambda) \| \leqslant 2R \frac{a^n}{n!}, \tag{21}$$

где $a = \int_0^t \alpha(t)\, dt$.

Пусть $x(t, \lambda)$, $x(t, \bar{\lambda})$ — два решения задачи (20) при фиксированных λ, $\bar{\lambda}$, тогда из (5) имеем

$$D_*(\| x(t, \lambda) - x(t, \bar{\lambda}) \|) \leqslant \| x'(t, \lambda) - x'(t, \bar{\lambda}) \| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha(t) \| x(t, \lambda) - x(t, \bar{\lambda}) \| + \beta(t) \| \lambda - \bar{\lambda} \|,$$

где D_* — правое нижнее производное число Дини [2]. Отсюда в силу теоремы о дифференциальных неравенствах [3] следует, что

$$\| x(t, \lambda) - x(t, \bar{\lambda}) \| \leqslant \int_0^t \beta(\mu) e^{\int_\mu^t \alpha(u) du} d\mu \, \| \lambda - \bar{\lambda} \|. \tag{22}$$

Определим операторы $V(\lambda)$ и $V_n(\lambda)$ следующим образом:

$$V(\lambda) = x_0 + \int_0^T f(t, x(t, \lambda), \lambda) \, dt, \quad V_n(\lambda) = x_0 + \int_0^T f(t, x_n(t, \lambda), \quad) \, dt.$$

Тогда из (22) следует, что

$$\| \lambda - \bar{\lambda} - B^{-1}(V(\lambda) - V(\bar{\lambda})) \| \leqslant \| B^{-1} \| \left(\int_0^T \alpha(t) \int_0^t \beta(\mu) e^{\int_\mu^t \alpha(u) du} d\mu dt + \right.$$
$$\left. + \varepsilon \right) \| \lambda - \bar{\lambda} \| = q \| \lambda - \bar{\lambda} \|, \tag{23}$$

а из (21) имеем

$$\| V(\lambda) - V_n(\lambda) \| \leqslant 2R \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{24}$$

Учитывая определение операторов $V(\lambda)$ и $V_n(\lambda)$, последовательные приближения (7) можно записать в виде $\lambda_{n+1} = U_n(\lambda_n) = \lambda_n - B^{-1}(V_n(\lambda_n) - x_T)$. Так как $V(\lambda)$ и $V_n(\lambda)$ удовлетворяют всем условиям леммы, тогда последовательные приближения λ_n сходятся к единственному решению λ^* уравнения $V(\lambda) = x_T$ и справедлива оценка (15) при $K = 2R$.

Теперь докажем сходимость $x_n(t)$. Из (5), (15) имеем

$$\| x_2(t) - x_1(t) \| \leqslant \int_0^t \alpha(\mu) \| x_1(\mu) - x_0(\mu) \| d\mu + b\Delta_1, \quad b = \int_0^T \beta(t) \, dt.$$

Аналогично,

$$\| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| \leqslant 2R \frac{a^n}{n!} + b \left[\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \Delta_1 + \ldots + \Delta_n \right] \leqslant$$

$$\leqslant 2R \frac{a^n}{n!} + b(2\rho + 2R \| B^{-1} \| e^{\frac{a}{q}})(1 + q) \left(\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + q^{n-1} \right),$$

$$\| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| \leqslant 2R \frac{a^n}{n!} + 2b(\rho + \| B^{-1} \| R e^{\frac{a}{q}})(1 + q) e^{\frac{a}{q}} q^{n-1}.$$

Отсюда следует, что $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится на $[0, T]$.

Допустим, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x^*(t)$. Переходя к пределу в (8), (7) при $n \to \infty$, утверждаем, что $(x^*(t), \lambda^*)$ составляет решение задачи (1), (2).

Для доказательства единственности решения допустим, что $(y(t), \eta)$ — другое решение задачи (1), (2), отличное от $(x^*(t), \lambda^*)$, тогда таким же методом, каким доказано (23), можно доказать, что $\| \lambda^* - \eta \| \leqslant q \| \lambda^* - \eta \|$. Так как $q < 1$, то $\lambda^* = \eta$ и, следовательно, $x^*(t) \equiv y(t)$.

Легко видеть, что справедливы оценки (18), (19). Теорема полностью доказана.

2. Теперь рассмотрим задачу (3), (2).

Предположим, что выполнены следующие условия.

1. Оператор $f(t, x, y, \lambda)$ определен, непрерывен по совокупности переменнных в области

$$Q = \{[0, T], \| x - x_0 \| \leqslant R, \| y \| \leqslant R', \| \lambda \| \leqslant \rho\}$$

и ограничен:

$$\| f(t, x, y, \lambda) \| \leqslant R', \quad R'T \leqslant R. \tag{25}$$

Кроме того, удовлетворяет условию Липшица

$$\| f(t, x, y, \lambda) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \| \leqslant L \| x - \bar{x} \| + M \| y - \bar{y} \| + N \| \lambda - \bar{\lambda} \|, \tag{26}$$

где $2M < 1$.

2. Существует такой линейный ограниченный и непрерывно обратимый оператор B, что в области Q выполняется условие

$$\left\| \int_0^T \{f(t, x, y, \lambda) - f(t, x, y, \bar{\lambda})\} \, dt - B(\lambda - \bar{\lambda}) \right\| \leqslant \varepsilon \| \lambda - \bar{\lambda} \|. \tag{27}$$

Для решения задачи (3), (2) построим последовательные приближения следующим образом:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - B^{-1} \left\{ \int_0^T f(t, x_n(t), x_n'(t), \lambda_n) \, dt - (x_T - x_0) \right\}, \tag{28}$$

$$x_{n+1}'(t) = f(t, x_n(t), x_n'(t), \lambda_{n+1}), \; x_n(0) = x_0, \tag{29}$$

где $x_0'(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и

$$\| x_0'(t) \| \leqslant R', \quad \| \lambda_0 \| \leqslant \rho, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Прежде чем доказать сходимость приближений (28), (29), докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть операторы $V(\lambda)$ и $V_n(\lambda)$ удовлетворяют всем условиям леммы* 1, *только вместо условия* (12) *выполняется условие*

$$\| V(\lambda) - V_n(\lambda) \| \leqslant K p^{n+1}, \; p < 1. \tag{30}$$

Тогда итерационный процесс

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - B^{-1} (V_n(\lambda_n) - \zeta),$$

где $\| \lambda_0 \| \leqslant \rho$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходится к единственному решению λ^* уравнения $V(\lambda) = \zeta$ и имеет место оценка

$$\| \lambda_{n+1} - \lambda_n \| \leqslant 4\rho q^n + 2K \| B^{-1} \| n\theta^n, \tag{31}$$

где $\theta = \max(p, q)$.

Доказательство этой леммы проводится таким же методом, каким доказана лемма 1.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Пусть, кроме того,*

$$q = \| B^{-1} \| \left\{ \varepsilon + \frac{NT}{1-M} \left(M + e^{\frac{LT}{1-M}} - 1 \right) \right\} < 1 \tag{32}$$

и

$$\| B^{-1} \| (\| x_T - x_0 \| + C) \leqslant (1 - \varepsilon \| B^{-1} \|) \rho, \tag{33}$$

где $C = \max\limits_{Q} \int\limits_0^T \| f(t, x, y, 0) \| \, dt.$

Тогда задача (3), (2) *имеет единственное решение* $(x^*(t), \lambda^*)$, *к которому сходятся последовательные приближения* (28), (29) *и скорость сходимости определяется следующими формулами:*

$$\| \lambda_{n+1} - \lambda^* \| \leqslant 2\rho q^n + 2 \| B^{-1} \| R e^{\frac{2LT}{p}} n \theta^n, \tag{34}$$

$$\| x_{n+1}(t) - x^*(t) \| \leqslant 2Re^{\frac{2LT}{p}} p^n + 2NTe^{\frac{2LT}{p}} \left(\rho n + \| B^{-1} \| R e^{\frac{2LT}{p}} \frac{n(n+1)}{2} \right) \theta^n, \tag{35}$$

где $p \in (2M, 1)$.

Доказательство. Из (25), (27), (33) легко видеть, что

$$\| x_n(t) - x_0 \| \leqslant R, \quad \| x_n'(t) \| \leqslant R', \quad \| \lambda_n \| \leqslant \rho.$$

Рассмотрим начальную задачу

$$x'(t) = f(t, x(t), x'(t), \lambda), \quad x(0) = x_0, \tag{36}$$

где λ — некоторый фиксированный элемент ($\| \lambda \| \leqslant \rho$). Построим последовательные приближения

$$x_{n+1}'(t, \lambda) = f(t, x_n(t, \lambda), x_n'(t, \lambda), \lambda), \quad x_n(0) = x_0, \quad \| x_0'(t) \| \leqslant R' \ (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Из (26) имеем

$$u_{n+1}(t) = \| x_{n+1}'(t, \lambda) - x_n'(t, \lambda) \| \leqslant L \| x_n(t, \lambda) - x_{n-1}(t, \lambda) \| +$$

$$+ M \| x_n'(t, \lambda) - x_{n-1}'(t, \lambda) \| \leqslant L \int\limits_0^t u_n(\nu) \, d\nu + M u_n(t),$$

$$u_2(t) \leqslant L \int\limits_0^t u_1(\nu) \, d\nu + M u_1(t) \leqslant 2R' (Lt + M),$$

$$u_3(t) \leqslant 2R' \left(\frac{(Lt)^2}{2} + 2MLt + M^2 \right).$$

Аналогично,

$$u_{n+1}(t) \leqslant 2R' 2^n \sum_{i=0}^{n} \frac{M^i (Lt)^{n-i}}{(n-i)!} \leqslant 2R' e^{\frac{2LT}{p}} p^n$$

и, следовательно, $\| x_{n+1}(t, \lambda) - x_n(t, \lambda) \| \leqslant 2Re^{\frac{2LT}{p}} p^n$. Отсюда следует равномерная сходимость $\{x_n(t, \lambda)\}$ и $\{x_n'(t, \lambda)\}$.

Допустим, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t, \lambda) = x(t, \lambda) \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} x_n'(t, \lambda) = x'(t, \lambda).$$

Легко, видеть, что $x(t,\lambda)$ — единственное решение задачи (36) и справедлива оценка

$$\| x_n(t,\lambda) - x(t,\lambda) \| \leqslant 2Re^{\frac{2LT}{p}} p^n. \qquad (37)$$

Определим операторы $V(\lambda)$ и $V_n(\lambda)$ следующим образом:

$$V(\lambda) = x_0 + \int_0^T f(t, x(t,\lambda), x'(t,\lambda), \lambda)\,dt,$$

$$V_n(\lambda) = x_0 + \int_0^T f(t, x_n(t,\lambda), x_n'(t,\lambda), \lambda)\,dt.$$

Тогда аналогично теореме 1 легко показать, что $V(\lambda)$ и $V_n(\lambda)$ удовлетворяют всем условиям леммы 2 при $K = 2Re^{\frac{2LT}{p}}$. Учитывая определения операторов $V(\lambda)$ и $V_n(\lambda)$, итерационный процесс (28) можно записать в виде $\lambda_{n+1} = \lambda_n - B^{-1}(V_n(\lambda_n) - x_T)$; следовательно, $\{\lambda_n\}$ сходится к единственному решению уравнения $V(\lambda) = x_T$ и справедлива оценка (31).

Из (29), (26), (31) имеем

$$u_{n+1}(t) = \| x'_{n+1}(t) - x'_n(t) \| \leqslant L \| x_n(t) - x_{n-1}(t) \| +$$
$$+ M \| x'_n(t) - x'_{n-1}(t) \| + N \| \lambda_{n+1} - \lambda_n \|,$$

$$u_{n+1}(t) \leqslant L \int_0^t u_n(\nu)\,d\nu + Mu_n(t) + N\Delta_{n+1},$$

$$u_2(t) \leqslant 2R'(Lt + M) + N\Delta_2,$$

$$u_3(t) \leqslant 2R'\left[\frac{(Lt)^2}{2} + 2MLt + M^2\right] + \Delta_2(Lt + M) + \Delta_3.$$

Аналогично,

$$u_{n+1}(t) \leqslant 2R'2^n \sum_{i=0}^{n} \frac{M^i (Lt)^{n-i}}{(n-i)!} + N \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j+1} 2^{n-j} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{M^i (Lt)^{n-j-i}}{(n-j-i)!},$$

$$u_{n+1}(t) \leqslant 2R'e^{\frac{2LT}{p}} p^n + 4Ne^{\frac{2LT}{p}} \left(\rho_n + \| B^{-1} \| Re^{\frac{2LT}{p}} \frac{n(n+1)}{2}\right) \theta^n$$

и, следовательно,

$$\| x_{n+1}(t) - x_n(t) \| \leqslant 2Re^{\frac{2LT}{p}} p^n + 4NTe^{\frac{2LT}{p}} \left(\rho_n + \| B^{-1} \| Re^{\frac{2LT}{p}} \frac{n(n+1)}{2}\right) \theta^n.$$

Отсюда следует, что $\{x'_n(t)\}$, $\{x_n(t)\}$ равномерно сходятся.

Допустим, что $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x^*(t)$ и $\lim_{n\to\infty} x'_n(t) = x'^*(t)$. Переходя к пределу в равенствах (28) и

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(\mu, x_n(\mu), x'_n(\mu), \lambda_n)\,d\mu,$$

утверждаем, что $(x^*(t), \lambda^*)$ является решением задачи (3), (2).

Легко видеть, что решение единственное и справедливы оценки (34), (35). Теорема доказана.

Выражаю глубокую благодарность Я. Д. Мамедову за помощь при написании этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. — Л., Гостехиздат, 1952. 232 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., «Наука», 1966. 656 с.
3. Мамедов Я. Д. Односторонние оценки в условиях исследования решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Баку, «Элм», 1971.
4. Сеидов З. Б. Краевые задачи с параметром для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — Сиб. мат. журн., 1968. 9, № 1, с. 223—228.

Азербайджанский
государственный университет

Поступила в редакцию 25.II. 1975 г.