УДК 517.534+519.21

А. Э. Еременко

О валироновских дефектах целых характеристических функций конечного порядка

Известная теорема Марцинкевича [1, с. 59] утверждает: если целая характеристическая функция f конечного порядка ρ имеет нуль борелевским исключительным значением, то $\rho \leqslant 2$. В статье [2] доказано, что этот вывод остается справедливым, если предположить, что функция f имеет нуль исключительным значением в смысле Неванлинны и $\delta(0, f)$ близок к 1. Покажем, что эта теорема не имеет аналога для исключительных значений в смысле Валирона.

Пусть H_ρ, $2 < \rho < \infty$, — множество целых характеристических функций f со свойствами:

$$f(z) = f(-z), \quad z \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

$$\ln|f(iy)| \leqslant |y|^\rho + 1, \quad y \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Свойство (1) эквивалентно $F(x) = 1 - F(-x+0)$, где F — функция распределения, соответствующая f. Из теоремы Леви [1, с. 14] следует, что H_ρ — топологически полное пространство в топологии равномерной сходимости на компактах. Из теоремы Бэра [3, с. 74] следует, что любое остаточное множество (т. е. счетное пересечение открытых всюду плотных множеств) непусто.

Теорема 1. *Множество функций из H_ρ порядка ρ остаточно.*

Теорема 2. *Множество функций $f \in H_\rho$, таких, что $\Delta(0, f) = 1$, остаточно.*

Следствие. *Пусть $\rho \geqslant 2$. Существует целая характеристическая функция порядка ρ такая, что $\Delta(0, f) = 1$.*

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим множества

$$E_n = \left\{ f \in H_\rho : (\forall r > 0)\left[(r \geqslant n) \Rightarrow \left(\ln\ln M(r, f) \leqslant \left(\rho - \frac{1}{n}\right)\ln r\right)\right]\right\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Если $f \in H_\rho \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)$, то f имеет порядок ρ. Очевидно, E_n замкнуты. Покажем, что E_n не содержат внутренних точек в H_ρ. Рассмотрим окрестность f, т. е. множество функций h таких, что $|f - h| < \varepsilon$ на некотором компакте $K \subset \mathbf{C}$. Пусть F — функция распределения, соответствующая f.

Для каждой точки непрерывности A функции F, $0 < A < \operatorname{rext} F$ (определение rext см. [1, с. 52]), рассмотрим функцию распределения $F_1(t)$:

$$F_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant -A, \\ F(t), & -A < t \leqslant A, \\ 1, & t > A. \end{cases}$$

Обозначим через f_1 характеристическую функцию функции F_1. Легко видеть, что $f_1 \to f$ равномерно на компактах при $A \to \operatorname{rext} F$. Зафиксируем A так, чтобы

$$|f_1(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in K. \tag{3}$$

Для каждого $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ в силу (1) имеем

$$f(iy) - f_1(iy) = 2\int_A^\infty \operatorname{ch}(yt)\, dF(t) - 2\operatorname{ch}(yA)\, F(-A) =$$

$$= -2\int_A^\infty \operatorname{ch}(yt)\, d(1 - F(t)) - 2\operatorname{ch}(yA)\, F(-A) =$$

$$= 2y\int_A^\infty \operatorname{sh}(yt)(1 - F(t))\, dt \geqslant 2y \operatorname{sh}(yA)\int_A^\infty (1 - F(t))\, dt > 0.$$

Последнее выражение стремится к бесконечности при $|y| \to \infty$. Отсюда легко следует, что при некотором $\delta > 0$ неравенство

$$|f_1(iy)| \leqslant \exp(|y|^\rho + 1) - \delta \tag{4}$$

справедливо для всех $y \in \mathbf{R}$. Пусть g — четная характеристическая функция порядка ρ с величиной типа $1/2$. Имеем

$$|f_1(iy)\, g(iy)| < \exp(|y|^\rho + 1) \tag{5}$$

при $|y| > y_0 > 0$. Учитывая, что $g(0) = 1$, выбираем $c > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось

$$|g(icy_0)| < \exp(y_0^\rho + 1)/(\exp(y_0^\rho + 1) - \delta), \tag{6}$$

$$|f_1(z)\, g(cz) - f_1(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in K. \tag{7}$$

Из (4), (6) при $|y| \leqslant y_0$ следует

$$|g(icy)\, f_1(iy)| \leqslant |g(icy_0)\, f_1(iy)| \leqslant \exp(|y|^\rho + 1).$$

Вместе с (5) это дает $h(z) = f_1(z)\, g(cz) \in H_\rho$, так как f_1, g — четные.

Заметим теперь, что $h \in H_\rho \setminus E_n$ при любом n, что доказывает теорему, так как из (3), (7) следует

$$|h(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad z \in K.$$

Доказательство теоремы 2. Обозначим $N_1(r, f) = \int_1^r \frac{n(t, 0, f)}{t}\, dt$.

Рассмотрим множества

$$E_n' = \left\{ f \in H_\rho : (\forall r > 0)\left[(r \geqslant n) \Rightarrow \left(N_1(r, f) \geqslant \frac{1}{n} T(r, f) \right) \right] \right\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Если $f \in H_\rho \diagdown \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n' \right)$, то $\Delta(0, f) = 1$, так как

$$N_1(r, f) = N(r, 0, f) + O(1), \quad r \to \infty.$$

Пусть $J(z) \equiv 1$, $J \in H_\rho$. Известно [4], что из $f_j \to f \neq J$, где f_j — произвольные целые функции, следует $N_1(r, f_j) \to N_1(r, f)$, $T(r, f_j) \to T(r, f)$. Поэтому множества E_n' замкнуты. Покажем, что они не содержат внутренних точек. Пусть $f \in E_n'$, зададим компакт $K \subset \mathbf{C}$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $h(z) = f_1(z) \exp(-cz^2)$, где $f_1 \in H_\rho$, $c > 0$ определяются как в доказательстве теоремы 1 (роль g играет $\exp(-z^2)$). Легко видеть, что $\Delta(0, h) = 1$, поэтому $h \in H_\rho \diagdown E_n'$ при любом n. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем

$$|f(z) - h(z)| < \varepsilon, \quad z \in K,$$

что и требовалось доказать.

Автор благодарит А. А. Гольдберга и И. В. Островского за внимание, проявленное к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 476 с.
2. Камынин И. П., Островский И. В. О нулях целых хребтовых функций. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1975, вып. 24, с. 41—50.
3. Окстоби Дж. Мера и категория. М., «Мир», 1974. 157 с.
4. Gauthier P., Hengartner W. The value distribution of most functions of one or several complex variables. — Ann. Math., 1972, **96**, N 1, p. 31—52.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
17.III. 1976 г.