УДК 517.9

М. М. Константинов, Д. Д. Байнов

Краевая задача с параметрами для системы дифференциально-функциональных уравнений

1. Введение. Основные обозначения. В последние годы проблема фундаментальной и качественной теории краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом активно разрабатывается в работах многих авторов (см., например, [1—6] и др.). Повышенный интерес к этим задачам объясняется тем, что, помимо их чисто теоретического значения, они находят многочисленные применения в смежных областях. Так, например, многие проблемы оптимального управления динамическими системами приводят к вариационным и краевым за-

дачам с отклоняющимся аргументом (см. [1, 5, 6]). В связи с приложениями здесь следует упомянуть проблемы субоптимального аналитического конструирования регуляторов в случаях неполной наблюдаемости, неполной управляемости и т. д. С другой стороны, исследование колебательных и апериодических режимов некоторых динамических систем с наследственностью тоже приводит к краевым задачам для дифференциально-функциональных уравнений (см. [3]).

Определенный интерес представляют краевые задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и параметром (см. [4] и др.). Помимо классических проблем типа Штурма — Луивилля теория этих задач находит применение при управлении объектов в пространстве параметров системы.

В данной работе находятся условия существования и единственности решения одного класса краевых задач с параметрами и с распределенным краевым условием для дифференциальных уравнений сверхнейтрального типа. Отметим, что краевые задачи сверхнейтрального типа с линейным сосредоточенным краевым условием изучались впервые в [1, 2].

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: R^{nm} — пространство вещественных $(n\times m)$-матриц, полуупорядоченное при помощи неотрицательного конуса K^{nm} всех $(n\times m)$-матриц с неотрицательными элементами ($R^{n1}=R^n$, $K^{n1}=K^n$); $|A|=(|A^{ij}|)\in K^{nm}$, где $A=(A^{ij})\in R^{nm}$; $C_V(I, S)$ — множество матричных функций с ограниченной вариацией, отображающих I в $S\subset R^{nm}$; $C(\omega, S)$ — множество непрерывных матричных функций $\omega\to S$; $\overline{\alpha,\beta}$ — множество целых чисел $\alpha, \alpha+1, \dots, \beta$ $(\alpha\leqq\beta)$.

Всюду в дальнейшем принимаем, что $i\in\overline{1,N}$; $j\in\overline{0,1}$; $s\in\overline{1,r}$; $\alpha,\beta\in\overline{1,n}$; $\pi, \varkappa\in\overline{1,m}$; $k\in\overline{1,p}$; $l\in\overline{1,q}$.

2. Постановка задачи. Основные предположения. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot x(t)=X(t,\lambda, x(\Delta_1), \dot x(\Delta_1), \dots, x(\Delta_r), \dot x(\Delta_r)), \qquad t\in I=[0,1], \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(A_i x(t_i)+B_i\dot x(t_i))=F\left(\lambda, \int_0^1 (df_0(t))\,x(t), \int_0^1 (df_1(t))\,\dot x(t)\right), \tag{2}$$

$$0=t_1<\dots<t_N=1,$$

$$\Gamma\left(\lambda, \int_0^1 (d\gamma_0(t))\,x(t), \int_0^1 (d\gamma_1(t))\,\dot x(t)\right)=0, \tag{3}$$

где при каждом $t\in I$ $x(t)=(x^\alpha(t))\in R^n$, λ — m-мерный вектор-параметр, $\Delta_s=\Delta_s(t,\lambda,x(t),\dot x(t))$, $X=(X^\alpha)\in C(I\times D, R^n)$, $D=\Lambda\times\underbrace{\Omega\times\dots\times\Omega}_{r}$, $\Omega=\Omega_0\times\Omega_1$; A_i, $B_i\in R^{nn}$; $F=(F^\alpha)\in C(\Lambda\times P_0\times P_1, R^n)$; $f_j=(f_j^{k\alpha})\in C_V(I, R^{pn})$; $\Gamma=(\Gamma^\pi)\in C(\Lambda\times Q_0\times Q_1, R^m)$; $\gamma_j=(\gamma_j^{l\alpha})\in C_V(I, R^{qn})$; $\Delta_s\in C(I\times\Lambda\times\Omega, (0,1))$. Здесь соответствующие множества бесконечномерных пространств определены следующим образом:

$$\Omega_j=\{\xi:|\xi|\leqq\omega_j=(\omega_j^\alpha)\in K^n\}\subset R^n,\quad \Lambda=\{\lambda: R^m\ni\lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1\in$$

$$\in R^m, \lambda_0<\lambda_1\}\subset R^m,$$

$$P_j=\{\xi:|\xi|\leqq p_j\in K^p\}\subset R^p,\qquad Q_j=\{\xi:|\xi|\leqq q_j\in K^q\}\subset R^q.$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

1. Матрица $A = A_1 + \ldots + A_N$ — неособая.

2. В областях определения функций X, Δ_s, F и Γ имеют место неравенства

$$|X(t, \lambda, \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_r, \eta_r) - X(\bar{t}, \lambda, \bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\xi}_r, \bar{\eta}_r)| \leqq$$

$$\leqq T\,|t - \bar{t}| + \sum_{s=1}^{r} (U_s\,|\xi_s - \bar{\xi}_s| + V_s\,|\eta_s - \bar{\eta}_s|),$$

$$T = (T^\alpha) \in K^n; \quad U_s = (U_s^{\alpha\beta}); \quad V_s = (V_s^{\alpha\beta}) \in K^{nn},$$

$$|F(\lambda, \xi, \eta) - F(\lambda, \bar{\xi}, \eta)| \leqq C_F\,|\xi - \bar{\xi}|, \quad C_F = (C_F^{\alpha k}) \in K^{np},$$

$$|\Gamma(\lambda, \xi, \eta) - \Gamma(\bar{\lambda}, \bar{\xi}, \eta)| \leqq L\,|\lambda - \bar{\lambda}| + C_\Gamma\,|\xi - \bar{\xi}|, \quad L = (L^{\pi\varkappa}) \in K^{mm};$$

$$C_\Gamma = (C_\Gamma^{\pi l}) \in K^{mq},$$

$$\Gamma^\pi(\lambda + hl_\pi, \xi, \eta) - \Gamma^\pi(\lambda, \xi, \eta) \geqq \begin{cases} a_\pi h, & \pi = 1, \ldots, m', \\ -a_\pi h, & \pi = m' + 1, \ldots, m, \end{cases}$$

$$l_\pi = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{\pi}, 0, \ldots, 0); \quad h, a_\pi \in K^1; \quad 1 \leqq m' \leqq m,$$

$$|\Delta_s(t, \lambda, \xi, \eta) - \Delta_s(\bar{t}, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})| \leqq \theta_s\,|t - \bar{t}| + u_s\,|\xi - \bar{\xi}| + v_s\,|\eta - \bar{\eta}|,$$

$$\theta_s \in K^1; \quad u_s = (u_s^\alpha), \quad v_s = (v_s^\alpha) \in K^{1n}.$$

3. Матрицы f_j и γ_j удовлетворяют условиям

$$\bigvee_{t=0}^{1} |f_j(t)| \leqq \hat{f}_j = (\hat{f}_j^{k\alpha}) \in K^{pn}, \qquad \bigvee_{t=0}^{1} |\gamma_j(t)| \leqq \hat{\gamma}_j = (\hat{\gamma}_j^{l\alpha}) \in K^{qn}.$$

4. Выполнены неравенства

$$\lambda_0 \leqq \lambda + \Lambda_0 \Gamma(\lambda, \xi, \eta) \leqq \lambda_1, \ (\lambda, \xi, \eta) \in \Lambda \times Q_0 \times Q_1, \ \Lambda_0 = \operatorname{diag}(\Lambda_0^\pi),$$

$$\Lambda_0^\pi = \frac{2}{a_\pi + L^{\pi\pi}} \operatorname{sign}\left(\pi - l' - \frac{1}{2}\right), \quad |X(t, \lambda, \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_r, \eta_r)| \leqq \omega_1,$$

$$(t, \lambda, \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_r, \eta_r) \in I \times D, \quad \hat{f}_1 \omega_1 \leqq p_1; \quad \hat{\gamma}_1 \omega_1 \leqq q_1.$$

5. Выполнено неравенство $\rho(|A^{-1}|\,C_F \hat{f}_0) < 1$, где $\rho(\Phi)$ — спектральный радиус матрицы Φ.

6. Выполнены неравенства

$$\hat{x}_0 + \omega_1 \leqq \omega_0, \quad \hat{x}_0 + \hat{f}_0\,\omega_1 \leqq p_0, \quad \hat{x}_0 + \hat{\gamma}_0 \omega_1 \leqq q_0,$$

где $\hat{x}_0 \in K^n$ — некоторый вектор, удовлетворяющий условиям $\hat{x}_0 \geqq |x_0|$. Здесь $x_0 \in R^n$ — решение уравнения

$$Ax_0 + \sum_{i=1}^{N} \left(A_i \int_0^{t_i} y(s)\,ds + B_i y(t_i) \right) = F\left(\lambda, (f_0(1) - f_0(0))\,x_0 + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (df_0(t)) \int_0^t y(s)\,ds, \int_0^1 (df_1(t))\,y(t) \right) \tag{4}$$

для каждого $y \in C(I, \Omega_1)$ (в силу условия 5 для каждого y существует единственное x_0).

3. Существование решения. Рассмотрим произведение $C(I, R^n)\times R^m$. Можно проверить, что операторное уравнение $z=\Pi z$, определенное на множестве $B=C(I,\Omega_1)\times\Lambda\subset C(I,R^n)\times R^m$, $z=(y,\lambda)$, $\Pi z=(\Pi y, \Pi\lambda)$, где

$$\Pi y(t)=X(t,\lambda,x(\Delta_1),y(\Delta_1),\ldots,x(\Delta_r),y(\Delta_r)),$$

$$\Pi\lambda=\lambda+\Lambda_0\,\Gamma\left(\lambda,\int_0^1(d\gamma_0(t))\,x(t),\int_0^1(d\gamma_1(t))\,y(t)\right);\quad x(t)=x_0+\int_0^t y(s)\,ds,$$

а x_0 — решение уравнения (4), эквивалентное краевой задаче (1) — (3). Кроме того, в силу условий 1 — 6, оператор Π непрерывен на выпуклом замкнутом множестве B и $\Pi B\subset B$, причем траектория $x(t)$ остается в области Ω_0 при $y\in C(I,\Omega_1)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1 — 6. *Пусть, кроме того, система квадратических алгебраических неравенств*

$$\tau^\alpha(\delta^1,\ldots,\delta^n)=\tau^\alpha(\delta)=T^\alpha+\sum_{s=1}\sum_{\beta=1}^n U_s^{\alpha\beta}\psi_s\omega_1^\beta+$$

$$+\sum_{\beta=1}^n\left(\sum_{s=1}^r\left(V_s^{\alpha\beta}\psi_s+v_s^\beta\sum_{\gamma=1}^n U_s^{\alpha\gamma}\omega_1^\gamma\right)\right)\delta^\beta+$$

$$+\sum_{\beta=1}^n\sum_{\gamma=1}^n\left(\sum_{s=1}^r V_s^{\alpha\beta}v_s^\gamma\right)\delta^\beta\delta^\gamma\leqq\delta^\alpha,\quad \psi_s=\theta_s+\sum_{\beta=1}^n u_s^\beta\,\omega_1^\beta,$$

относительно $\delta=(\delta^\alpha)\in R^n$ *имеет решение* $\delta\in K^n$.

Тогда краевая задача (1) — (3) *имеет хотя бы одно решение* $(x,\lambda)\in C(I,\Omega_0)\times\Lambda$, *причем производная* $\dot x$ *удовлетворяет условию Липшица* $|\dot x(t)-\dot x(\bar t)|\leqq\delta\,|t-\bar t|$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\widetilde B=\widetilde C(I,\Omega_1)\times\Lambda\subset B$, где

$$y\in\widetilde C(I,\Omega_1)\Rightarrow|y(t)-y(\bar t)|\leqq\delta\,|t-\bar t|. \tag{5}$$

Для $t,\bar t\in I$ и $y\in\widetilde C(I,\Omega_1)$ имеем

$$|\Pi^\alpha y(t)-\Pi^\alpha y(\bar t)|\leqq T^\alpha\,|t-\bar t|+$$

$$+\sum_{s=1}\sum_{\beta=1}^n(U_s^{\alpha\beta}\,|x^\beta(\Delta_s)-x^\beta(\overline\Delta_s)|+V_s^{\alpha\beta}\,|y^\beta(\Delta_s)-y^\beta(\overline\Delta_s)|),$$

$$\overline\Delta_s=\Delta_s(\bar t,\lambda,x(\bar t),y(\bar t)),$$

откуда в силу неравенств $|x(t)-x(\bar t)|\leqq\omega_1\,|t-\bar t|$ и $|\Delta_s-\overline{\Delta_s}|\leqq\theta_s\,|t-$ $-\bar t|+\sum_{\beta=1}^n(u_s^\beta\,|x^\beta(t)-x^\beta(\bar t)|+v_s^\beta\,|y^\beta(t)-y^\beta(\bar t)|)$ после некоторых выкладок получаем

$$|\Pi^\alpha y(t)-\Pi^\alpha y(\bar t)|\leqq\tau^\alpha(\delta)\,|t-\bar t|\leqq\delta^\alpha\,|t-\bar t|,$$

т. е. условие (5) имеет место для Πy, $y\in\widetilde C(I,\Omega_1)$. Следовательно, $\Pi\widetilde B\subset\widetilde B$. Так как множество $\widetilde C(I,\Omega_1)$ (а следовательно, и множество $\widetilde B$) выпукло, замкнуто и относительно компактно, то в силу принципа Шаудера о неподвижной точке получаем утверждение теоремы 1.

4. Единственность решения. Накладывая дополнительные ограничения на рост функций f, Δ_s, F и Γ, можно доказать единственность решения краевой задачи (1) — (3), существование которого гарантируется условиями теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть, кроме того, в соответствующих областях выполнены условия*

$$|X(t, \lambda, \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_r, \eta_r) - X(t, \bar{\lambda}, \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_r, \eta_r)| \leqq L_0 |\lambda - \bar{\lambda}|,$$

$$|F(\lambda, \xi, \eta) - F(\bar{\lambda}, \xi, \bar{\eta})| \leqq L_1 |\lambda - \bar{\lambda}| + G_F |\eta - \bar{\eta}|,$$

$$|\Gamma(\lambda, \xi, \eta) - \Gamma(\lambda, \xi, \bar{\eta})| \leqq G_\Gamma |\eta - \bar{\eta}|,$$

$$|\Delta_s(t, \lambda, \xi, \eta) - \Delta_s(t, \bar{\lambda}, \xi, \eta)| \leqq w_s |\lambda - \bar{\lambda}|, \quad L_0 = (L_0^{\alpha\pi}) \in K^{nm},$$

$$L_1 = (L_1^{\alpha\pi}) \in K^{nm},$$

$$G_F = (G_F^{\alpha k}) \in K^{np}, \quad G_\Gamma = (G_\Gamma^{\pi l}) \in K^{mq}, \quad w_s = (w_s^{\pi}) \in K^{1m}.$$

Пусть, наконец, $\rho(\Phi) < 1$, *где* $\Phi \in K^{(n+m)(n+m)}$,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{nn} & \Phi_{nm} \\ \Phi_{mn} & \Phi_{mm} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{nn} = (\Phi_{nn}^{\alpha\beta}) \in K^{nn}, \quad \Phi_{nm} = (\Phi_{nm}^{\alpha\pi}) \in K^{nm}, \quad \Phi_{mn} = (\Phi_{mn}^{\pi\alpha}) \in K^{mn},$$

$$\Phi_{mm} = (\Phi_{mm}^{\pi\varkappa}) \in K^{mm},$$

а клетки матрицы Φ *определены следующим образом:*

$$\Phi_{nn}^{\alpha\beta} = V^{\alpha\beta} + U^{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n} U^{\alpha\gamma} S_1^{\gamma\beta} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r} \sum_{\gamma=1}^{n} (U_s^{\alpha\gamma} \omega_1^{\gamma} + V_s^{\alpha\gamma} \delta^{\gamma}) \left(v_s^{\beta} + u_s^{\beta} + \sum_{\varepsilon=1}^{n} u_s^{\varepsilon} S_1^{\varepsilon\beta} \right),$$

$$\Phi_{nm}^{\alpha\pi} = L_0^{\alpha\pi} + \sum_{\gamma=1}^{n} U^{\alpha\gamma} S_2^{\gamma\pi} + \sum_{s=1}^{r} \sum_{\gamma=1}^{n} (U_s^{\alpha\gamma} \omega_1^{\gamma} + V_s^{\alpha\gamma} \delta^{\gamma}) \left(w_s^{\pi} + \sum_{\varepsilon=1}^{n} u_s^{\varepsilon} S_2^{\varepsilon\pi} \right),$$

$$U = (U^{\alpha\beta}) = \sum_{s=1}^{r} U_s, \quad V = (V^{\alpha\beta}) = \sum_{s=1}^{r} V_s,$$

$$S_1 = (S_1^{\alpha\beta}) = S\left(|A^{-1}|(C_F \hat{f}_0 + G_F \hat{f}_1) + \sum_{i=1}^{N} (|A^{-1} B_i| + |A^{-1} A_i| t_i)\right),$$

$$S_2 = (S_2^{\alpha\pi}) = (E - |A^{-1}| C_F \hat{f}_0)^{-1}, \quad E = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) \in K^{nn},$$

$$\Phi_{mn} = |\Lambda_0| (C_\Gamma \hat{\gamma}_0 (S_1 + E) + G_\Gamma \hat{\gamma}_1), \quad \Phi_{mm} = \tilde{\Phi}_{mm} + |\Lambda_0| C_\Gamma S_2, \quad \tilde{\Phi}_{mm} = (\tilde{\Phi}_{mm}^{\pi\varkappa}),$$

$$\tilde{\Phi}_{mm}^{\pi\varkappa} = \begin{cases} \dfrac{L^{\pi\pi} - a_\pi}{L^{\pi\pi} + a_\pi}, & \pi = \varkappa, \\[2ex] \dfrac{2L^{\pi\varkappa}}{L^{\pi\pi} + a_\pi}, & \pi \neq \varkappa. \end{cases}$$

Тогда краевая задача (1) — (3) *имеет единственное решение со свойствами, определенными в теореме* **1.**

Доказательство. Введем обозначения

$$\| y \| = (\| y^\alpha \|) \in K^n, \quad \| z \| = (\| y \|, |\lambda|) \in K^{n+m},$$

где $\| y^\alpha \| = \sup \{ | y^\alpha (t) | : t \in I \}$.

Пусть краевая задача (1) — (3) допускает два решения $z, \bar{z}$; $\bar{z} = (\bar{y}, \bar{\lambda})$. Тогда, учитывая, что $| x_0 - \bar{x}_0 | \leqq S_1 \| y - \bar{y} \| + S_2 | \lambda - \bar{\lambda} |$, получаем

$$| y (t) - \bar{y} (t) | \leqq L_0 | \lambda - \bar{\lambda} | + U | x_0 - \bar{x}_0 | + (U + V) \| y - \bar{y} \| +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r} (U_s \omega_1 + V_s \delta) | \Delta_s - \bar{\Delta}_s |$$

и

$$\| y - \bar{y} \| \leqq (V + U + US_1) \| y - \bar{y} \| + (L_0 + US_2) | \lambda - \bar{\lambda} | +$$

$$+ \sum_{s=1}^{r} (U_s \omega_1 + V_s \delta) ((v_s + u_s + u_s S_1) \| y - \bar{y} \| + (w_s + u_s S_2) | \lambda - \bar{\lambda} |) =$$

$$= \Phi_{nn} \| y - \bar{y} \| + \Phi_{nm} | \lambda - \bar{\lambda} |.$$

Аналогично,

$$| \lambda - \bar{\lambda} | \leqq \Phi_{mn} \| y - \bar{y} \| + \Phi_{mm} | \lambda - \bar{\lambda} |.$$

Следовательно, $\| z - \bar{z} \| \leqq \Phi \| z - \bar{z} \|$. Последнее неравенство вместе с условием $\rho (\Phi) < 1$ завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Константинов М. М. Существование и единственность решений краевых задач для дифференциальных уравнений сверхнейтрального типа. Math. Balkanica, 1973, 3, с. 213—219.
2. Константинов М. М., Байнов Д. Д. Об одной краевой задаче второго порядка для систем дифференциальных уравнений сверхнейтрального типа. — Сообщ. АН ГрузССР, 1974, **74**, № 2, с. 285—288.
3. Schmitt K. On Solutions of Nonlinear Differential Equations with Deviating Argument. — SIAM J. Appl. Math., 1969, **17**, N 6, p. 1171—1176.
4. Сеидов З. Б. Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. — УМЖ, 1973, **25**, № 6, с. 830—835.
5. Каменский Г. А. Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом. — Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 8, с. 1349—1358.
6. Sannuti P., Reddy P. Asymptotic Series Solutions of Optimal Systems with Small Time Delay. — IEEE Trans. Autom. Control, 1973, **AC-18**, N 3, p. 250—259.

София, Высший машинно-электротехнический институт,
Пловдиевский университет

Поступила в редакцию
18.X. 1975 г.