УДК 517.948.324:517.548

А. И. Кочура

Задача Римана с обобщенным коэффициентом

Рассмотрим задачу Римана

$$F^{+}(x) = (1 + K(x))\, F^{-}(x) + G(x) \tag{1}$$

на прямой, предполагая, что $K(x) \in L_2\{0, n\}$, $G(x) \in L_2\{0, n\}$, т. е. они являются обобщенными функциями на пространстве основных функций $\varphi(x) \in L_2\{0, -n\}$. При этом придерживаемся обозначений работы [1]: $\varphi(x) \in L_2\{-m, -n\}$, если $\left(\frac{d}{dx} + 1\right)^n [(x+i)^m \varphi(x)]$ суммируемо с квадратом на оси Ox; норма

$$\|\varphi\|_{-m,-n}=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(\frac{d}{dx}+1\right)^n[(x+i)^m\varphi(x)]\right|^2dx\right\}^{1/2}.$$

Задачу (1) следует понимать в смысле: для любой основной функции $\varphi(x)\in L_2\{0,-n\}$ имеет место равенство

$$(F^+-(1+K)F^--G,\varphi)=0. \tag{1'}$$

Решение ищем в классе функций $F^+(x)\in L_2^+\{0,n\}$, $F^-(x)\in L_2^-\{0,-n-1\}$.

Для решения этой задачи введем в рассмотрение приближенную задачу. Решим ее обычным методом, а затем покажем, что предел решения является решением исходной задачи.

1. Решение приближенной задачи.

1. Рассмотрим приближенную задачу

$$F_\nu^+(x)=(1+K*h_\nu)F_\nu^-(x)+G*h_\nu, \tag{2}$$

где $h_\nu(x)=\dfrac{1}{\pi\nu}\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{\nu^2}}$ — дельтаобразная функция, т. е. $(h_\nu,\varphi)\underset{\nu\to\infty}{\to}(\delta,\varphi)$.

Аналогично ведет себя свертка $K*h_\nu$ при $\nu\to\infty$. Именно,

$$(K*h_\nu,\varphi)=[K(\xi),(h_\nu(x),\varphi(x+\xi))]\underset{\nu\to\infty}{\to}(K(\xi),\varphi(\xi)).$$

Действительно, по предположению $K\in L_2\{0,n\}$. Функция $(h_\nu(x),\varphi(x+\xi))$ принадлежит классу $L_2\{0,-n\}$, поскольку $V(h_\nu(x),\varphi(x+\xi))=Vh_\nu V\varphi$, а $Vh_\nu\in L_2\{-\infty,-1\}$ и $V\varphi\in L_2\{-n,0\}$, т. е. $V(h_\nu(x),\varphi(x+\xi))\in L_2\{-n,0\}$. Через Vf обозначено преобразование Фурье функции f.

Оценим разность

$$(K,\varphi)-(K*h_\nu,\varphi)=[K*(\delta-h_\nu),\varphi]=[K(\xi),(\delta(x)-h_\nu(x),\varphi(x+\xi))],$$

где $(\delta(x)-h_\nu(x),\varphi(x+\xi))\in L_2\{0,-n\}$.

Согласно определению линейного ограниченного функционала

$$|(K,\varphi)-(K*h_\nu,\varphi)|\leqslant\|K\|_{0,n}\|(\delta(x)-h_\nu(x),\varphi(x+\xi))\|_{0,-n}, \tag{3}$$

а

$$\|(\delta(x)-h_\nu(x),\varphi(x+\xi))\|_{0,-n}=\|VV^{-1}(\delta(x)-h_\nu(x),\varphi(x+\xi))\|_{0,-n}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\|V^{-1}(\delta(x)-h_\nu(x),\varphi(x+\xi))\|_{-n,0}=C_1\|V(\delta-h_\nu)V^{-1}\varphi\|_{-n,0}=$$

$$=C_1\|(1-e^{-|x|/\nu})V^{-1}\varphi\|_{-n,0}=C_1\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|(x+i)^n(1-e^{-|x|/\nu})V^{-1}\varphi|^2dx\right\}^{1/2}, \tag{4}$$

где C_1 — некоторая постоянная, не зависящая от ν.

Чтобы оценить интеграл, входящий в формулу (4), представим его в виде суммы трех интегралов в пределах от $-\infty$ до $-\sqrt{\nu}$, от $-\sqrt{\nu}$ до $\sqrt{\nu}$ и от $\sqrt{\nu}$ до ∞.

Для первого интеграла запишем оценку

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{\nu}}|(x+i)^n(1-e^{-|x|/\nu})V^{-1}\varphi|^2dx\leqslant\int_{-\infty}^{-\sqrt{\nu}}|(x+i)^nV^{-1}\varphi|^2dx=$$

$$=\|V^{-1}\varphi\|_{-n,0}^2\int_{-\infty}^{-\sqrt{\nu}}\left|(x+i)^n\frac{V^{-1}\varphi}{\|V^{-1}\varphi\|_{-n,0}}\right|^2dx=\varepsilon_1(\nu)\|\varphi\|_{0,-n}^2,$$

где $\varepsilon_1(\nu)\to 0$ при $\nu\to\infty$, так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|(x+i)^n\frac{V^{-1}\varphi}{\|V^{-1}\varphi\|_{-n,0}}\right|^2dx$ сходится. Точно так же оценим третий интеграл. Для второго интеграла запишем оценку

$$\int\limits_{-\sqrt{\nu}}^{\sqrt{\nu}}|(x+i)^n(1-e^{-|x|/\nu})V^{-1}\varphi|^2dx\leqslant\max_{-\sqrt{\nu}\leqslant x\leqslant\sqrt{\nu}}(1-e^{-|x|/\nu})^2\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(x+i)^nV^{-1}\varphi|^2dx=(1-e^{-1/\sqrt{\nu}})^2\|V^{-1}\varphi\|^2_{-n,0}\leqslant$$

$$\leqslant C_2(1-e^{-1/\sqrt{\nu}})^2\|\varphi\|^2_{0,-n}=\varepsilon_2(\nu)\|\varphi\|^2_{0,-n},$$

причем $\varepsilon_2(\nu)\to 0$ при $\nu\to\infty$,

Учитывая эти оценки, из формулы (4) запишем неравенство

$$\|(\delta(x)-h_\nu(x),\varphi(x+\xi))\|_{0,-n}\leqslant\varepsilon(\nu)\|\varphi\|_{0,-n},\tag{5}$$

где $\varepsilon(\nu)\to 0$ при $\nu\to\infty$.

Из неравенства (3) запишем оценку

$$|(K,\varphi)-(K*h_\nu,\varphi)|\leqslant\varepsilon(\nu)\|K\|_{0,n}\|\varphi\|_{0,-n},\tag{6}$$

что доказывает предельное равенство $\lim\limits_{\nu\to\infty}(K*h_\nu,\varphi)=(K,\varphi)$.

Одновременно это доказывает неравенство

$$\|K-K*h_\nu\|_{0,n}\leqslant\varepsilon(\nu)\|K\|_{0,n},\tag{7}$$

т. е. $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|K-K*h_\nu\|_{0,n}=0$.

Отметим здесь же, что $K*h_\nu\in L_2\{0,-\infty\}$ при $K\in L_2\{0,n\}$, которое следует из рассмотрения преобразования Фурье свертки $K*h_\nu$. Через $L_2\{0,-\infty\}$ обозначен класс функций, имеющих квадратично суммируемые на оси Ox производные любого порядка.

Все сказанное справедливо и для свертки $G*h_\nu$.

2. Ищем решение приближенной задачи (2) в классе $L_2\{0,-\infty\}$. Пусть для всех ν, начиная с некоторого, $1+K*h_\nu\neq 0$ всюду на оси Ox, $K*h_\nu\underset{\nu\to\infty}{\to}0$ и индекс $\varkappa=\operatorname{Ind}(1+K*h_\nu)=0$; пусть ν достаточно велико.

Произведем факторизацию коэффициента $1+K*h_\nu$. Прологарифмируем его, взяв главную ветвь. Тогда

$$\ln(1+K*h_\nu)=B^+_\nu(x)-B^-_\nu(x),\tag{8}$$

где $B^+_\nu(x)\in L^+_2\{0,-\infty\}$, $B^-_\nu(x)\in L^-_2\{0,-\infty\}$, причем

$$B^+_\nu(x)=V\left[\frac{\operatorname{sgn}x+1}{2}V^{-1}\ln(1+K*h_\nu)\right],$$

$$B^-_\nu(x)=V\left[\frac{\operatorname{sgn}x-1}{2}V^{-1}\ln(1+K*h_\nu)\right].\tag{9}$$

Поэтому

$$1+K*h_\nu=\frac{e^{B^+_\nu(x)}}{e^{B^-_\nu(x)}}\equiv\frac{T^+_\nu(x)}{T^-_\nu(x)}.\tag{10}$$

Перепишем теперь задачу (2) в виде

$$\frac{F_\nu^+(x)}{T_\nu^+(x)} = \frac{F_\nu^-(x)}{T_\nu^-(x)} + \frac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)}, \tag{11}$$

где

$$\frac{F_\nu^+(x)}{T_\nu^+(x)} \in L_2^+\{0, -\infty\}, \quad \frac{F_\nu^-(x)}{T_\nu^-(x)} \in L_2^-\{0, -\infty\}, \quad \frac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)} \in L_2\{0, -\infty\}.$$

Решение ее запишем в виде

$$\frac{F_\nu^+(x)}{T_\nu^+(x)} = V\left[\frac{\operatorname{sgn} x + 1}{2} V^{-1} \frac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)}\right], \quad \frac{F_\nu^-(x)}{T_\nu^-(x)} = V\left[\frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} V^{-1} \frac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)}\right].$$

Отсюда

$$F_\nu^+(x) = e^{V\left[\frac{\operatorname{sgn} x+1}{2} V^{-1} \ln(1+K*h_\nu)\right]} \times$$
$$\times V\left[\frac{\operatorname{sgn} x + 1}{2} V^{-1} \left(G*h_\nu e^{-V\left[\frac{\operatorname{sgn} x+1}{2} V^{-1}\ln(1+K*h_\nu)\right]}\right)\right],$$

$$F_\nu^-(x) = e^{V\left[\frac{\operatorname{sgn} x-1}{2} V^{-1} \ln(1+K*h_\nu)\right]} \times$$
$$\times V\left[\frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} V^{-1} \left(G*h_\nu e^{-V\left[\frac{\operatorname{sgn} x+1}{2} V^{-1}\ln(1+K*h_\nu)\right]}\right)\right].$$

2. Решение исходной задачи.

Теорема 1. *Пусть* $F_\nu^+(x) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} F^+(x) \in L_2^+\{0, n\}$ *в том смысле, что* $(F_\nu^+ - F^+, \varphi) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$, *а* $F_\nu^-(x) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} F^-(x) \in L_2^-\{0, -n-1\}$ *в смысле нормы в* $L_2\{0, -n-1\}$; *тогда* $F^+(x)$, $F^-(x)$ — *решение исходной задачи* (1).

Доказательство. Подставим решение $F_\nu^+(x)$, $F_\nu^-(x)$ приближенной задачи (2) в левую часть формулы (1′) и рассмотрим предел полученного выражения при $\nu \to \infty$:

$$\lim_{\nu\to\infty} [F_\nu^+ - (1+K) F_\nu^- - G, \varphi] = \lim_{\nu\to\infty} [(K*h_\nu - K) F_\nu^- + (G*h_\nu - G), \varphi].$$

Согласно (6)

$$|[(K*h_\nu - K) F_\nu^-, \varphi]| = |(K*h_\nu - K, F_\nu^-\varphi)| \leqslant \varepsilon(\nu) \|K\|_{0,n} \|F_\nu^-\varphi\|_{0,-n},$$

поэтому

$$|[(K*h_\nu - K) F_\nu^-, \varphi]| \leqslant \varepsilon(\nu) \|K\|_{0,n} \|F_\nu^-\|_{0,-n-1} \|\varphi\|_{0,-n} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(\nu) \|K\|_{0,n} (\|F_\nu^- - F^-\|_{0,-n-1} + \|F^-\|_{0,-n-1}) \|\varphi\|_{0,-n}$$

и

$$\lim_{\nu\to\infty} [(K*h_\nu - K) F_\nu^-, \varphi] = 0. \tag{12}$$

Аналогично,

$$\lim_{\nu\to\infty} (G*h_\nu - G, \varphi) = 0. \tag{13}$$

Следовательно,

$$\lim_{\nu\to\infty} [F_\nu^+ - (1+K) F_\nu^- - G, \varphi] = 0.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\nu\to\infty} [F_\nu^+ - (1+K) F_\nu^- - G, \varphi] = [F^+ - (1+K) F^- - G, \varphi],$$

так как

$$|[F_\nu^+ - F^+ - (1+K)(F_\nu^- - F^-), \varphi]| \leqslant |(F_\nu^+ - F^+, \varphi)| + |(F_\nu^- - F^-, \varphi)| +$$

$$+ |[K, (F_\nu^- - F^-)\varphi]| \leqslant |(F_\nu^+ - F^+, \varphi)| + \| F_\nu^- - F^- \|_{0,0} \| \varphi \|_{0,0} +$$

$$+ \| K \|_{0,n} \| F_\nu^- - F^- \|_{0,-n-1} \| \varphi \|_{0,-n} = \gamma_1(\nu) + \gamma_2(\nu)(1 + \| K \|_{0,n}) \| \varphi \|_{0,-n},$$

где $\gamma_1(\nu)$, $\gamma_2(\nu)$ — величины, стремящиеся к нулю при $\nu \to \infty$, согласно условию теоремы. При этом учтено, что $\| \varphi \|_{0,0} \leqslant \| \varphi \|_{0,-n}$.

Таким образом, $(F^+ - (1+K)F^- - G, \varphi) = 0$.

3. Решение приближенной задачи в случае ненулевого индекса.

Рассмотрим задачу (2) $F_\nu^+(x) = (1 + K*h_\nu) F_\nu^-(x) + G*h_\nu$. Пусть для всех ν, начиная с некоторого, $1 + K*h_\nu \neq 0$ всюду на оси Ox, $K*h_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$ и индекс $\varkappa = \operatorname{Ind}(1 + K*h_\nu) = \text{const} \neq 0$; пусть ν достаточно велико.

Перепишем задачу (2) в виде

$$F_\nu^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\varkappa} \left[\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\varkappa} (1 + K*h_\nu)\right] F_\nu^- + G*h_\nu. \tag{14}$$

Индекс функции $\left(\dfrac{x+i}{x-i}\right)^{\varkappa}(1 + K*h_\nu) \equiv 1 + C_\nu(x)$ равен нулю, $C_\nu(x) \in \in L_2\{0, -\infty\}$.

Факторизуя функцию $1 + C_\nu(x)$, получаем

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\varkappa}(1 + K*h_\nu) = \frac{T_\nu^+(x)}{T_\nu^-(x)},$$

где

$$T_\nu^+(x) = e^{V\left\{\frac{\operatorname{sgn} x+1}{2} V^{-1} \ln\left[\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\varkappa}(1+K*h_\nu)\right]\right\}},$$

$$T_\nu^-(x) = e^{V\left\{\frac{\operatorname{sgn} x-1}{2} V^{-1} \ln\left[\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\varkappa}(1+K*h_\nu)\right]\right\}}. \tag{15}$$

Поэтому задачу (14) можно записать в виде

$$F_\nu^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\varkappa} \frac{T_\nu^+(x)}{T_\nu^-(x)} F_\nu^-(x) + G*h_\nu. \tag{16}$$

Из выражения (16) следует, что решение задачи (2) при $\varkappa > 0$ имеет вид

$$F_\nu^+(x) = T_\nu^+(x) \left\{ \sum_{k=0}^{\varkappa-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k \frac{1}{x+i} + V\left[\frac{\operatorname{sgn} x + 1}{2} V^{-1}\left(\frac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)}\right)\right] \right\},$$

$$F_\nu^-(x) = T_\nu^-(x) \left\{ \sum_{k=0}^{\varkappa-1} C_k \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\varkappa-k} \frac{1}{x+i} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\varkappa} V\left[\frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} V^{-1}\left(\frac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)}\right)\right] \right\},$$

где C_k — произвольные постоянные.

При $\varkappa < 0$ решение имеет вид

$$F_\nu^+(x) = T_\nu^+(x) V\left[\frac{\operatorname{sgn} x + 1}{2} V^{-1}\left(\frac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)}\right)\right],$$

$$F_\nu^-(x) = T_\nu^-(x)\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{|\varkappa|} V\left[\frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} V^{-1}\left(\frac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)}\right)\right],$$

где $F_\nu^+(x) \in L_2^+\{0, -\infty\}$. Функция $F_\nu^-(x)$, вообще говоря, не принадлежит классу $L_2^-\{0, -\infty\}$, так как множитель $\left(\dfrac{x-i}{x+i}\right)^{|\varkappa|}$ имеет полюс порядка $|\varkappa|$ в точке $z = -i$.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (2) в этом случае является следующее условие: аналитическое продолжение функции $\left[\dfrac{G*h_\nu}{T_\nu^+(x)}\right]^-$ должно иметь в точке $z=-i$ нуль порядка $|\varkappa|$ для всех ν, начиная с некоторого.

Теорема 2. *Пусть* $F_\nu^+(x) \underset{\nu\to\infty}{\to} F^+(x) \in L_2^+\{0, n\}$ *в том смысле, что* $(F_\nu^+ - F^+, \varphi) \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$, *а* $F_\nu^-(x) \underset{\nu\to\infty}{\to} F^-(x) \in L_2^-\{0, -n-1\}$ *в смысле нормы в* $L_2\{0, -n-1\}$. *Тогда* $F^+(x)$, $F^-(x)$ — *решение задачи* (1) *при соответствующем индексе.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Пример. Решение задачи Римана

$$F^+(x) = (1+\delta(x))F^-(x) + \frac{1}{x+i} + \delta^-(x) + \frac{i}{x-i}$$

ищем в классе $F^+(x) \in L_2^+\{0, 1\}$, $F^-(x) \in L_2^-\{0, -2\}$.

Так как

$$F^+(x) = F^-(x) + F^-(0)\,\delta^+(x) - F^-(0)\,\delta^-(x) + \frac{1}{x+i} + \delta^-(x) + \frac{i}{x-i},$$

то решение задачи запишем в виде

$$F^+(x) = \frac{1}{x+i} + \delta^+(x), \quad F^-(x) = -\frac{i}{x-i}.$$

Приближая функции $\delta(x)$, $\dfrac{1}{x+i}$, $\delta^-(x)$ и $\dfrac{1}{x-i}$ их свертками с $h_\nu(x)$, запишем приближенную задачу:

$$F_\nu^+(x) = \left(1 + \frac{1}{\pi\nu}\frac{1}{x^2+\frac{1}{\nu^2}}\right)F_\nu^-(x) + \frac{1}{x+i\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x-\frac{i}{\nu}} + \frac{i}{x-i\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}.$$

Ее решение имеет вид

$$F_\nu^+(x) = \frac{1}{x+i\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x+\frac{i}{\nu}} + \frac{1}{\pi\nu i}\frac{1}{\frac{1}{\nu}+\sqrt{\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\pi\nu}}}\frac{1}{x+\frac{i}{\nu}} +$$

$$+\frac{i}{x+\frac{i}{\nu}} - \frac{i\left(1+\frac{2}{\nu}\right)}{1+\frac{1}{\nu}+\sqrt{\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\pi\nu}}}\frac{1}{x+\frac{i}{\nu}},$$

$$F_\nu^-(x) = \frac{1}{\pi\nu}\frac{1}{i\left(\frac{1}{\nu}+\sqrt{\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\pi\nu}}\right)}\frac{1}{x-i\sqrt{\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\pi\nu}}} -$$

$$-\frac{i\left(1+\frac{2}{\nu}\right)}{1+\frac{1}{\nu}+\sqrt{\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\pi\nu}}}\,\frac{x-\frac{i}{\nu}}{x-i\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}\,\frac{1}{x-i\sqrt{\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\pi\nu}}}.$$

При $\nu\to\infty$ $F_\nu^+(x)\to F^+(x)$, $F_\nu^-(x)\to F^-(x)$, так как

$$-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x+\frac{i}{\nu}}\underset{\nu\to\infty}{\to}\delta^+(x),\quad -\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x-\frac{i}{\nu}}\to\delta^-(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дыбин В. Б. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки в классе обобщенных функций. — ДАН СССР, 1965, **161**, № 4, с. 753—756.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию
23.II. 1976 г.