УДК 531.15:517.926:513

В. Н. Лаптинский, А. К. Лапковский

К теории представлений решений обобщенных уравнений Родрига—Гамильтона

В данной работе получено представление решений дифференциальной системы, устанавливающей взаимную ориентацию двух твердых тел в пространстве по их угловым скоростям $\underset{(1)}{\boldsymbol{\omega}}$ и $\underset{(2)}{\boldsymbol{\omega}}$.

1. Рассмотрим (см. [1, гл. II]) обобщенные уравнения Родрига—Гамильтона

$$\frac{}{dt} = (\underset{(1)}{A} + \underset{(2)}{A})\,\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\underset{(\varepsilon)}{A}$, $\varepsilon = 1, 2$, — матрицы вида

$$\underset{(1)}{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \underset{(1)}{\omega^1} & \underset{(1)}{\omega^2} & \underset{(1)}{\omega^3} \\ -\underset{(1)}{\omega^1} & 0 & \underset{(1)}{\omega^3} & -\underset{(1)}{\omega^2} \\ -\underset{(1)}{\omega^2} & -\underset{(1)}{\omega^3} & 0 & \underset{(1)}{\omega^1} \\ -\underset{(1)}{\omega^3} & \underset{(1)}{\omega^2} & -\underset{(1)}{\omega^1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underset{(2)}{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\underset{(2)}{\omega^1} & -\underset{(2)}{\omega^2} & -\underset{(2)}{\omega^3} \\ \underset{(2)}{\omega^1} & 0 & \underset{(2)}{\omega^3} & -\underset{(2)}{\omega^2} \\ \underset{(2)}{\omega^2} & -\underset{(2)}{\omega^3} & 0 & \underset{(2)}{\omega^1} \\ \underset{(2)}{\omega^3} & \underset{(2)}{\omega^2} & -\underset{(2)}{\omega^1} & 0 \end{bmatrix},$$

а λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — нормированные кватернионы, задающие переход от трехгранника O_1 к трехграннику O_2; $\underset{(\varepsilon)}{\boldsymbol{\omega}} = \{\underset{(\varepsilon)}{\omega^i}\}$, $i = 1, 2, 3,$ — угловая скорость трехгранника O_ε, спроектированная на свои же собственные оси.

Интегрирование системы (1) определяет взаимную ориентацию трехгранников, если известна эта ориентация в начальный момент времени.

Если трехгранник O_1 неподвижен, то из (1) приходим к классическим уравнениям Родрига — Гамильтона (см. [2, с. 120]), проинтегрированным в [3].

Отметим, что структуру обобщенных кинематических уравнений Родрига — Гамильтона имеют и кинематические уравнения релятивистского вращения в механике теории относительности, что указано в [4] (см. также [5—8]).

2. Легко проверяется, что матрицы типа $\underset{(1)}{A}$ образуют алгебру, изоморфную векторной алгебре евклидова пространства E_3. При этом коммутатору матриц типа $\underset{(1)}{A}$ соответствует векторное произведение отвечающих им векторов. То же самое можно сказать и о матрицах типа $\underset{(2)}{A}$. Обозначим эти алгебры соответственно через $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Отметим далее, что алгебры $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ между собой коммутируют.

3. Решение $\boldsymbol{\lambda}(t)$ системы (1) будем искать в виде

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \underset{(1)}{\mathfrak{N}}(t)\,\underset{(2)}{\mathfrak{N}}(t)\,\boldsymbol{\lambda}(0), \tag{2}$$

где $\underset{(1)}{\mathfrak{N}}$ — решение системы

$$\frac{d\underset{(1)}{\mathfrak{N}}}{dt} = \underset{(1)}{A}\underset{(1)}{\mathfrak{N}}, \tag{3}$$

$\underset{(1)}{\mathfrak{N}}(0) = E$ — единичная. Тогда $\underset{(2)}{\mathfrak{N}}$ удовлетворяет системе

$$\frac{d\underset{(2)}{\mathfrak{N}}}{dt} = \underset{(1)}{\mathfrak{N}}^{-1}\underset{(2)}{A}\underset{(1)}{\mathfrak{N}}\underset{(2)}{\mathfrak{N}}, \quad \underset{(2)}{\mathfrak{N}}(0) = E. \tag{4}$$

Решение системы (3) ищем по правилу, изложенному в [3]:

$$\underset{(1)}{\mathfrak{N}} = \exp \underset{(1)}{\mathfrak{M}},$$

$$\underset{(1)}{\mathfrak{M}} = \underset{(1)}{\mathfrak{M}_1} + \ldots + \underset{(1)}{\mathfrak{M}_m} + \ldots, \quad \underset{(1)}{\mathfrak{M}_m}(0) = 0, \quad (\forall m), \tag{5}$$

где ряд в (5) равномерно сходится при малых t.

В силу коммутаторной структуры матриц $\underset{(1)}{\mathfrak{M}_m}$ они $(\forall m)$ принадлежат алгебре $\mathfrak{L}_1$. Далее, в силу поэлементной сходимости ряда (5) и свойства коммутативности алгебр $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, имеет место равенство

$$\underset{(1)}{\mathfrak{N}}^{-1}\underset{(2)}{A}\underset{(1)}{\mathfrak{N}} = \underset{(2)}{A}, \tag{6}$$

а значит система (4) независима от системы (3) и имеет вид:

$$\frac{d\underset{(2)}{\mathfrak{N}}}{dt} = \underset{(2)}{A}\underset{(2)}{\mathfrak{N}}. \tag{7}$$

К системе (7) можно применить тот же метод решения, что и для системы (3) (см. [3]), а именно

$$\underset{(2)}{\mathfrak{N}} = \exp \underset{(2)}{\mathfrak{M}},$$

$$\underset{(2)}{\mathfrak{M}} = \underset{(2)}{\mathfrak{M}_1} + \ldots + \underset{(2)}{\mathfrak{M}_m} + \ldots, \quad \underset{(2)}{\mathfrak{M}_m}(0) = 0. \quad (\forall m). \tag{8}$$

4. Поставим в соответствие каждой из матриц $\underset{(\varepsilon)}{\mathfrak{M}}(t)$ вектор $\underset{(\varepsilon)}{\mathbf{\Omega}}(t)$ (как и в [3])

$$\underset{(\varepsilon)}{\mathbf{\Omega}}(t) = \int\limits_0^t \Big\{ \underset{(\varepsilon)}{\boldsymbol{\omega}}(\tau) + \frac{1}{2} \underset{(\varepsilon)}{\boldsymbol{\omega}}(\tau) \times \underset{(\varepsilon)}{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}(\tau) + \frac{1}{4} \underset{(\varepsilon)}{\boldsymbol{\omega}}(\tau) \times \int\limits_0^\tau \underset{(\varepsilon)}{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \times \underset{(\varepsilon)}{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}(\sigma)\, d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{12} (\underset{(\varepsilon)}{\boldsymbol{\omega}}(\tau) \times \underset{(\varepsilon)}{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}(\tau)) \times \underset{(\varepsilon)}{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}(\tau) + \ldots \Big\} d\tau, \quad \underset{(\varepsilon)}{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}(t) = \int\limits_0^t \underset{(\varepsilon)}{\boldsymbol{\omega}}(\tau)\, d\tau.$$

Имеет смысл для интегральных векторов $\underset{(\varepsilon)}{\mathbf{\Omega}}(t)$ построить нормированные кватернионы $\underset{(\varepsilon)}{\lambda}$, $\varepsilon = 1, 2$:

$$\underset{(\varepsilon)}{\boldsymbol{\lambda}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \widetilde{q}_\varepsilon^2}}, \; \frac{q_\varepsilon^1}{\sqrt{1 + \widetilde{q}_\varepsilon^2}}, \; \frac{q_\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \widetilde{q}_\varepsilon^2}}, \; \frac{q_\varepsilon^3}{\sqrt{1 + \widetilde{q}_\varepsilon^2}} \right\}, \tag{9}$$

где $\widetilde{q}_\varepsilon = \operatorname{tg}(\underset{(\varepsilon)}{\Omega}/2)$, $\underset{(\varepsilon)}{\Omega} = |\underset{(\varepsilon)}{\mathbf{\Omega}}|$, $q_\varepsilon^i = \widetilde{q}_\varepsilon \dfrac{\Omega_\varepsilon^i}{\underset{(\varepsilon)}{\Omega}}$. Тогда непосредственным вычислением проверяется, что нахождение кватерниона $\boldsymbol{\lambda}(t)$ по формуле (2) сводится к умножению (по кватернионному закону) начального кватерниона $\boldsymbol{\lambda}(0)$ на кватернион $\underset{(2)}{\boldsymbol{\lambda}}(t)$ справа и кватернион $\underset{(1)}{\boldsymbol{\lambda}^*}(t)$ слева, т. е.

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \underset{(1)}{\lambda^*}(t)\, \lambda(0)\, \underset{(2)}{\lambda}(t). \tag{10}$$

Здесь $\underset{(1)}{\lambda^*}$ — кватернион, сопряженный к $\underset{(1)}{\lambda}$; $\underset{(1)}{\lambda}$, $\underset{(2)}{\lambda}$ определены согласно (9).

Если $\underset{(1)}{\boldsymbol{\omega}} = 0$, то получаем решение классического уравнения Родрига — Гамильтона (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков В. Н. Теория гироскопических компасов. М., «Наука», 1972. 344 с.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961. 824 с.
3. Лаптинский В. Н., Лапковский А. К. О приближенном решении классических уравнений Родрига — Гамильтона. — УМЖ, 1976, 28, № 2. с. 243—247.
4. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. О репере Френе — Серре, перенесении Ферми — Уолкера и кинематических уравнениях Кели — Клейна. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1975, № 6, с. 59—64.
5. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. Прецессия Томаса и релятивистское обобщение кинематических формул Эйлера. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1974, № 4, с. 113—114.
6. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. О релятивистских кинематических уравнениях для вектора истинного поворота. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1976, № 1, с. 119—120.
7. Лаптинский В. Н., Лапковский А. К. О сравнении параллельного перенесения и перенесения Ферми — Уолкера в теории гравитации. — Укр. геометр. сб., Харьков, 1975, вып. 17, с. 107—111.
8. Лапковский А. К., Лаптинский В. Н. О горизонтальных путях и развертках в теории гравитации. — Изв. вузов. Математика, 1976, № 5, с. 116—118.

Могилевский филиал
Института физики АН БССР,
Могилевский педагогический институт

Поступила в редакцию
28.VI. 1976 г.