УДК 517.537

Ю. И. Мельник

О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутых выпуклых многоугольниках

1. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках $a_1, a_2, \ldots, a_N$ $(N \geqslant 3)$, M — открытая часть $\overline{M}$ и $C = \overline{M} \setminus M$ — граница $\overline{M}$. Предполагаем, что начало координат принадлежит M. Через $E_p = E_p(M)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ обозначим класс регулярных в M функций $f(z)$ таких, что $\sup\limits_n \left\{ \int\limits_{\gamma_n} |f(z)|^p |dz| \right\} < \infty$, где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — некоторая последовательность спрямляемых контуров, расположенных внутри M и стремящихся к C. Известно, что каждая функция $f(z) \in E_p$ имеет почти всюду на C граничные значения, определяющие функцию, интегрируемую по модулю в p-й степени на C. В пространстве E_p вводится норма по формуле $\| f(z) \|_p = \left\{ \int\limits_C |f(z)|^p |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}$, после чего оно становится полным.

В работах [1 — 4] подробно изучен вопрос о представлении регулярных функций $f(z)$ рядами Дирихле в $\overline{M}$. При этом в работах [1, 2] предполагается, что $f(z)$ регулярна в M и непрерывна в $\overline{M}$, а в работе [3] — что $f(z) \in E_2$. В данной работе с помощью метода, предложенного В. К. Дзядыком в работе [2], исследован случай, когда $f(z) \in E_p$, $1 < p < 2$ (случай $2 < p$ особого интереса не представляет).

2. Пусть $f(z) \in E_p$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$L(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{a_k \lambda}, \quad c_k \neq 0, \tag{1}$$

и $\{\lambda_m\}_1^\infty$ — упорядоченное по возрастанию модулей множество нулей функции $L(\lambda)$ (предполагаем, что все нули $L(\lambda)$ простые). Следуя В. К. Дзядыку (см. [2]), рассмотрим функцию $f_r(z) = f(rz)$ $(0 < r < 1)$ и положим

$$\omega_r(\lambda_m) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\frac{2}{r+1}}} \left\{ \int\limits_0^t f(r(t-\eta))\, e^{\lambda_m \eta} d\eta \right\} \gamma(t)\, dt,$$

где $\gamma(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{c_k}{t - a_k}$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\Gamma_R = \{\zeta_R : \zeta_R = R\zeta,\ \zeta \in C\}$ $(R > 0)$. Ниже показано, что предел $\omega(\lambda_m) = \lim\limits_{r \to 1} \omega_r(\lambda_m)$ существует. Функции $f(z)$ сопоставим ряд Дирихле

$$f(z) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \omega(\lambda_m) \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)}. \tag{2}$$

В дальнейшем, для удобства ссылок на работу [2], будем считать, что $c_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Нам потребуются следующие свойства $L(\lambda)$ (см. [2]):

1) найдется такое число $\Lambda > 0$, что при $|\lambda| > \Lambda$ все нули $L(\lambda)$ будут расположены в окрестности N лучей $\{\lambda : \lambda = r \exp(-i \arg(i(a_k - a_{k+1}))),\ r > 0\}$ в точках λ_n^k $(k = 1, 2, \ldots, N,\ n = 1, 2, \ldots)$, для которых

$$|\lambda_n^k - \overset{0}{\lambda}{}_n^k| = O(e^{-cn}), \quad \overset{0}{\lambda}{}_n^k = \frac{(2n-1)\pi}{i(a_k - a_{k+1})}, \quad 0 < c = \text{const};$$

2) $|\exp(\lambda_n^j(a_k-\zeta))| \leqslant \mathrm{const}$ ($\zeta\in\overline{M}$, $0\leqslant \arg(a_k-\zeta)/(a_{j+1}-a_j)\leqslant\pi$, $1\leqslant j, k\leqslant N$);

3) для всех $j=1, 2, \ldots, N$, $\zeta\in\overline{M}$ при достаточно больших n имеет место оценка

$$\left|\frac{e^{\lambda_n^j z}}{L'(\lambda_n^j)}-\frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_n^j\left(z-\dfrac{a_j+a_{j+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{n+1}i(a_j-a_{j+1})}\right| = O(e^{-cn}),\quad 0<c=\mathrm{const}.$$

Лемма. *Пусть $f(z)\in E_p$, $1\leqslant p<\infty$. Тогда ряд* (2) *сходится к $f(z)$ абсолютно в M и равномерно на компактах внутри M.*

Доказательство. Имеем

$$\omega_r(\lambda_n^j)=\sum_{k=1}^{N}\int_0^{a_k} f(r(a_k-\eta))\,e^{\lambda_n^j\eta}d\eta=\sum_{k=1}^{N}e^{\lambda_n^j a_k}\left(\int_0^{a_j}+\int_{\gamma_{jk}}\right)f(r\zeta)\,e^{-\lambda_n^j\zeta}d\zeta=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_{jk}} f(r\zeta)\,e^{-\lambda_n^j(\zeta-a_k)}d\zeta,\tag{3}$$

где γ_{jk} — часть ломаной C, соединяющей точки a_j и a_k. Используя свойство 2) функции $L(\lambda)$ и то, что $\|f_r(z)-f(z)\|_1\underset{r\to1}{\to}0$ (см. [5]), легко находим

$$|\omega_r(\lambda_n^j)|\leqslant\mathrm{const},\ \ \omega_r(\lambda_n^j)\underset{r\to1}{\to}\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_{jk}}f(\zeta)\,e^{-\lambda_n^j(\zeta-a_k)}d\zeta\overset{\mathrm{df}}{=}\omega(\lambda_n^j).\tag{4}$$

Доказательство леммы завершается дословным повторением рассуждений, с помощью которых получена теорема 2.2 работы [2].

Положим

$$\omega_{nj}=\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_{jk}}f(\zeta)\,e^{-\overset{0}{\lambda}{}_n^j(\zeta-a_k)}d\zeta.$$

Используя свойства 1), 2) функции $L(\lambda)$, второе соотношение в (4), выпуклость M и неравенство Гельдера, по схеме работы [2] легко находим, что

$$|\omega_{nj}-\omega(\lambda_n^j)|=O(e^{-cn})\quad(0<c=\mathrm{const}),\tag{5}$$

$$\omega_{nj}=\int_{a_j}^{a_{j+1}}f(\zeta)\,e^{-\overset{0}{\lambda}{}_n^j(\zeta-a_{j+1})}d\zeta+\sum_{k\neq j,j+1}\int_{\gamma_{jk}}f(\zeta)\,e^{-\overset{0}{\lambda}{}_n^j(\zeta-a_k)}d\zeta=f_{nj}+b_{nj},\tag{6}$$

$$f_{nj}=\frac{a_j-a_{j+1}}{2}\int^{2\pi}f\left(a_j+\frac{a_{j+1}-a_j}{2\pi}\,\theta\right)e^{i\theta/2}e^{-in\theta}d\theta,\quad b_{nj}=O\left(\frac{1}{n^{1/q}}\right)\tag{7}$$

(здесь и далее q — сопряженный с p показатель, т. е. $q=p/(p-1)$). Соотношения (5) — (7) нам потребуются в дальнейшем.

3. Теорема 1. *Пусть $f(z)\in E_p$, $1<p<2$. Тогда для любого p', $1<p'<p$ ряд* (2) *сходится в метрике $E_{p'}$.*

Доказательство. Выберем такое n_0, что при $n>n_0$ и всех $1\leqslant j\leqslant N$ $|\overset{0}{\lambda}{}_n^j|>\Lambda$. Тогда, используя абсолютную сходимость ряда (2) при $z\in M$, запишем

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\omega(\lambda_m)\,e^{\lambda_m z}/L'(\lambda_m)=\sum_{j=1}^{N}\psi_j(z)+\varphi(z)\ \ (z\in M),\tag{8}$$

где

$$\psi_j(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}\omega_{nj}\,\frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_n^j\left(z-\dfrac{a_j+a_{j+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{n+1}i\,(a_j-a_{j+1})}\quad(j=1,\,2,\,\ldots,\,N,\ z\in M),\qquad(9)$$

$$\varphi(z)=\sum_{m=1}^{m_0}\omega(\lambda_m)\frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)}+\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\left(\omega(\lambda_n^j)\,\frac{e^{\lambda_n^j z}}{L'(\lambda_n^j)}-\right.$$

$$\left.-\,\omega_{nj}\,\frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_n^j\left(z-\dfrac{a_j+a_{j+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{n+1}i\,(a_j-a_{j+1})}\right)\quad(z\in M),\qquad(10)$$

m_0 — некоторый индекс, зависящий от n_0. Учитывая (5) и свойство 3) функции $L(\lambda)$, видим, что ряд (10) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{M}$ и, более того, абсолютно и равномерно в $\overline{M}$ сходится ряд, полученный из (10) почленным дифференцированием любое число раз (так что $\varphi(z)$ бесконечно дифференцируема в $\overline{M}$). Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно убедиться, что при всех $1\leqslant j\leqslant N$ ряды (9) сходятся в метрике $E_{p'}$. Зафиксируем j, $1\leqslant j\leqslant N$, и пусть $k\neq j$. Положим $A_{rj}=\{z:z=r\zeta,\ \zeta\in[a_j,\,a_{j+1}]\}$, $0<r<1$. При $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ и фиксированном $1/2\leqslant r\leqslant 1$ определим действительные функции $t(\theta)$ и $\delta(\theta)$ как решение уравнения

$$r\,(a_j+(a_{j+1}-a_j)\,\theta/2\pi)=a_k+(a_{k+1}-a_k)\,(t+i\delta)/2\pi.$$

Легко видеть, что: а) при $k=j-1$ и $\theta\leqslant 2\pi d_{j-1}/\,|\,a_{j+1}-a_j\,|\sin\alpha_j$ (здесь и далее через d_{j-1} обозначено расстояние от точки $z=0$ до стороны $[a_{j-1},\,a_j]$, а через α_j — угол между сторонами $[a_{j-1},\,a_j]$, $[a_j,\,a_{j+1}]$) выполняется неравенство $\delta(\theta)\geqslant\theta$; б) при $k=j+1$ и $2\pi-\theta\leqslant 2\pi d_j/\,|\,a_{j+1}-a_j\,|\sin\alpha_{j+1}$ выполняется неравенство $\delta(\theta)\geqslant 2\pi-\theta$; в) при $k\neq j-1,\ j+1$ выполняется неравенство $\delta(\theta)\geqslant\mathrm{const}>0$. Используя эти соображения, очевидное равенство

$$\left|\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_n^k\left(z-\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)\right)\right|=\exp\left(-\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta(\theta)\right)$$

$$\left(z=r\left(d_j+\frac{a_{j+1}-a_j}{2\pi}\,\theta\right)\in A_{rj}\right),$$

соотношения (6), (7) и неравенство Гельдера, при $1/2\leqslant r\leqslant 1$ и $1<p'<p$ получаем

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left\{\int\limits_{A_{rj}}\left|\omega_{nk}\,\frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_n^k\left(z-\dfrac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{n+1}i\,(a_k-a_{k+1})}\right|^{p'}|\,dz\,|\right\}^{1/p'}=O\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{|\,\omega_{nk}\,|}{n^{1/p'}}\right)=$$

$$=O\left(\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}|\,f_{nk}\,|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{p/p'}}\right)^{1/p}\right)+O\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{1/q+1/p'}}\right)=O(1),\qquad(11)$$

ибо (см. [6, т. II, с, 153]) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}|\,f_{nk}\,|^q<\infty$. Из (11), (8) следует, что

$$\int\limits_{A_{rj}}|\,\psi_j(z)\,|^{p'}\,|\,dz\,|\leqslant\mathrm{const}<\infty.\qquad(12)$$

Далее, полагая $z = a_j + \frac{a_{j+1} - a_j}{2\pi}(\theta + i\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, находим, что

$$\psi_j(z) = \frac{e^{\varepsilon/2} e^{-i\theta/2}}{a_{j+1} - a_j} \sum_{n=n_0}^{\infty} \omega_{nj} e^{in\theta} e^{-\varepsilon n},$$

т. е. $(a_{j+1} - a_j) e^{-\varepsilon/2} e^{i\theta/2} \psi_j(z)$ — абелевские средние тригонометрического ряда $\sum_{n=n_0}^{\infty} \omega_{nj} e^{in\theta}$. Отсюда, учитывая (12) и то, что при $\varepsilon \to 0$ и фиксированных $b > 0$, $0 \leqslant a \leqslant 2\pi - b\varepsilon$, в силу (7), имеют место оценки (см. [6, т. I, с. 404, 243])

$$\int_a^{a+b\varepsilon} \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} f_{nk} e^{in\theta} e^{-\varepsilon n} \right|^{p'} d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} f_{nk} e^{in\theta} e^{-\varepsilon n} \right|^{p'} d\theta = O(1),$$

$$\int_a^{a+b\varepsilon} \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} b_{nk} e^{in\theta} e^{-\varepsilon n} \right|^{p'} d\theta = O\left(\varepsilon \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon n}}{n^{1/q}} \right)^{p'} \right) =$$

$$= O\left(\varepsilon \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon x}}{x^{1/q}} dx \right)^{p'} \right) = O\left(\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^{1/p}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right) \right)^{p'} \right) = o(1),$$

заключаем (см. [6, т. I, с. 243]), что ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} \omega_{nj} e^{in\theta}$ — ряд Фурье функции $\hat{\psi}_j(\theta) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi_j\left(a_j + \frac{a_{j+1} - a_j}{2\pi}\theta\right) e^{i\theta/2}(a_{j+1} - a_j) \in L_{p'}$, и, значит, он сходится в метрике $L_{p'}$ (см. [6, т. I, с. 423]). Отсюда и из соотношения (11), в котором k и j следует поменять ролями, следует сходимость ряда (9) в метрике $E_{p'}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Несколько иначе эта теорема может быть доказана при $2 \leqslant p < \infty$.

2. При $p = 2$ более сильный результат (и для более широкого класса функций $L(\lambda)$) доказан в работе [3]: если $f(z) \in E_2$, то ряд (2) сходится в метрике E_2.

4. После того, как доказана теорема 2, легко устанавливается следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f(z) \in E_p$, $1 < p < 2$, *и* z_0 — *произвольная неугловая точка многоугольника* $\overline{M}$, *лежащая на стороне* $[a_{j_0}, a_{j_0+1}]$ $(1 \leqslant j_0 \leqslant N)$. *Положим*

$$f_j(\theta) = f\left(a_j + \frac{a_{j+1} - a_j}{2\pi}\theta\right), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

и пусть точке z_0 *соответствует точка* θ_0, $0 < \theta_0 < 2\pi$, *при отображении* $z = a_{j_0} + (a_{j_0+1} - a_{j_0})\theta/2\pi$. *Тогда*

а) *для сходимости ряда Дирихле* (2) *в точке* z_0 *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд Фурье функции* $f_{j_0}(\theta)$ *в точке* θ_0;

б) *ряд Дирихле* (2) *сходится почти всюду на* C;

в) *ряд Дирихле* (2) *суммируется в точке* z_0 *к* $f(z_0)$ *методом* (C, α), $\alpha > 0$, *если* z_0 — *точка непрерывности функции* $f(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (8) — (10) и того, что при $j \neq j_0$ ряды (9) и ряд (10) сходятся абсолютно в точке z_0, заключаем, что сходимость или суммируемость ряда (2) в точке z_0 эквивалентны соответственно сходимости или суммируемости в точке z_0 ряда (9) при $j = j_0$, что в свою очередь эквивалентно сходимости или суммируемости ряда Фурье функции $\hat{\psi}_j(\theta)$ в точке θ_0. Утверждения а), з) теоремы теперь легко следуют из соотношения (8) и того, что функции $\psi_j(z)$ $(j \neq j_0)$ регулярны в точке z_0, функция $\varphi(z)$ бесконечно дифференцируема в этой точке, а ряды Фурье функций $f_{j_0}(\theta)$ и $e^{i\theta/2}f_{j_0}(\theta)$ сходятся или суммируются одновременно в точке θ_0. Утверждение б) следует из утверждения а) и того, что $f_{j_0}(\theta) \in L_p$ (см. [7]). Теорема доказана.

В случае, когда $L(\lambda)$ имеет вид (1), утверждение а) теоремы обобщает теорему 3.4 работы [3], а утверждение в) — усиливает теорему 1 работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А. Ф. О представлении аналитических функций в замкнутой выпуклой области рядами Дирихле. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 3, с. 577—592.
2. Дзядык В. К. Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках. — Мат. сб., 1974, **95**, № 4, с. 475—493.
3. Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, **39**, № 3, с. 657—702.
4. Дзядык В. К., Крутиголова Е. К. О представлении аналитических функций рядами Дирихле на границе области сходимости. — Мат. заметки, 1973, **14**, № 6, с. 769—780.
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М. — Л., Гостехиздат, 1950. 336 с.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I, М., «Мир», 1965. 615 с.; Т. II, М., «Мир», 1965. 537 с.
7. Hunt A. On the convergence of Fourier series. — Orthogonal expansions and their continuous analogues, 1968, p. 235—255.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
2.III. 1976 г.