УДК 517.52

К. М. Слепенчук

Об условиях обратимости в теории суммируемости двойных рядов

Устанавливаются теоремы тауберова типа для матричных преобразований двойных рядов и дано приложение этих теорем к методам Абеля.

Преобразуем двойной числовой ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl} \tag{1}$$

с помощью полунепрерывной (дискретной) матрицы $\Gamma = \| \gamma_{kl}(x, y) \| (\Gamma = \| \gamma_{kl}^{(mn)} \|)$ следующим образом:

$$\Gamma(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y) u_{kl} \left(\Gamma_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}^{(mn)} u_{kl} \right).$$

Двойной ряд (1) Г-суммируем к S, если $\Gamma(x, y) \to S$, $x, y \to \infty$ ($\Gamma_{mn} \to S$, $m, n \to \infty$).

Пусть $\{\lambda_m\}$, $\{p_m\}$, $\{q_m\}$ и $\{\lambda_n^{(1)}\}$, $\{p_n^{(1)}\}$, $\{q_n^{(1)}\}$ — заданные последовательности чисел, отличных от нуля ($n = 1, 2, \ldots$).

Положим

$$f_m = \frac{q_{m-1}}{\lambda_m p_m}, \quad g_m = \lambda_m q_m \left(\frac{1}{\lambda_m p_m} - \frac{1}{\lambda_{m+1} p_{m+1}} \right),$$

$$f_n^{(1)} = \frac{q_{n-1}^{(1)}}{\lambda_n^{(1)} p_n^{(1)}}, \quad g_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)} q_n^{(1)} \left(\frac{1}{\lambda_n^{(1)} p_n^{(1)}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{(1)} p_{n+1}^{(1)}} \right),$$

$$t_{mn} = \lambda_m \sum_{l=1}^{n} u_{ml}, \quad \tau_{mn} = \lambda_n^{(1)} \sum_{k=1}^{m} u_{kn}, \quad p_{mn} = \frac{1}{q_m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_k p_k u_{kl},$$

$$q_{mn} = \frac{1}{q_n^{(1)}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{(1)} p_l^{(1)} u_{kl}, \quad r_{mn} = \frac{1}{q_m q_n^{(1)}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_k p_k \lambda_l^{(1)} p_l^{(1)} u_{kl}.$$

Прежде всего, докажем шесть независимых друг от друга предложений, ослабляющих тауберовы условия. Эти предложения сформулируем в следующем виде.

Теорема 1. *Пусть имеет место либо* 1) $g_m = O(1)$, $g_n^{(1)} = O(1)$, $f_m = O(1)$, $f_n^{(1)} = O(1)$, *либо* 2) $g_m = o(1)$, $g_n^{(1)} = o(1)$, $\{f_m\}$ *и* $\{f_n^{(1)}\}$ *сходятся, либо* 3) $\{g_m\}$, $\{g_n^{(1)}\}$, $\{f_m\}$ *и* $\{f_n^{(1)}\}$ *сходятся, либо* 4) $g_m = O(1)$, $g_n^{(1)} = O(1)$, $\{f_m\}$ *и* $\{f_n^{(1)}\}$ *сходятся, либо* 5) $g_m = o(1)$, $g_n^{(1)} = o(1)$, $f_m = o(1)$, $f_n^{(1)} = o(1)$, *либо* 6) $g_m = O(1)$, $g_n^{(1)} = O(1)$, $f_m = o(1)$, $f_n^{(1)} = o(1)$.

Если при $m, n \to \infty$ *соответственно этим соотношениям либо* 1) *ограниченные* $\{t_{mn}\}$ *и* $\{\tau_{mn}\}$ *сходятся к нулю, либо* 2) *ограниченные* $\{t_{mn}\}$ *и* $\{\tau_{mn}\}$ *сходятся к нулю, либо* 3) *ограниченные* $\{t_{mn}\}$ *и* $\{\tau_{mn}\}$ *сходятся, либо* 4) $t_{mn} = O(1)$, $\tau_{mn} = O(1)$, *либо* 5) *ограниченные* $\{t_{mn}\}$ *и* $\{\tau_{mn}\}$ *сходятся к нулю, либо* 6) $t_{mn} = O(1)$, $\tau_{mn} = O(1)$ *являются тауберовыми условиями для* Г-*метода, то соответственно при* $m, n \to \infty$ *либо* 1) *ограниченные* $\{p_{mn}\}$, $\{q_{mn}\}$ *и* $\{r_{mn}\}$ *стремятся к нулю, либо* 2) *ограниченные* $\{p_{mn}\}$, $\{q_{mn}\}$ *и* $\{r_{mn}\}$ *сходятся, либо* 3) *ограниченные* $\{p_{mn}\}$, $\{q_{mn}\}$ *и* $\{r_{mn}\}$ *сходятся, либо* 4) *ограниченные* $\{p_{mn}\}$, $\{q_{mn}\}$ *и* $\{r_{mn}\}$ *сходятся, либо* 5) $p_{mn} = O(1)$, $q_{mn} = O(1)$, $r_{mn} = O(1)$, *либо* 6) $p_{mn} = O(1)$, $q_{mn} = O(1)$, $r_{mn} = O(1)$ *также являются тауберовыми условиями для* Г-*метода.*

Доказательство. Введем обозначение $\Delta\alpha_{mn} = \alpha_{mn} - \alpha_{m-1n} - \alpha_{mn-1} + \alpha_{m-1n-1}$. Прежде всего, заметим, что

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \frac{g_k}{\lambda_k} \frac{g_l^{(1)}}{\lambda_l^{(1)}} r_{kl} + f_{m+1} p_{mn} + f_{n+1}^{(1)} q_{mn} - f_{m+1} f_{n+1}^{(1)} r_{mn} = H_{mn} + V_{mn}, \tag{2}$$

где

$$H_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \frac{g_k}{\lambda_k} \frac{g_l^{(1)}}{\lambda_l^{(1)}} r_{kl}. \tag{3}$$

В таком случае

$$\Gamma(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y) \, \Delta H_{kl} + \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y) \, \Delta V_{kl} = f_1(x, y) + f_2(x, y). \tag{4}$$

Так как в дальнейшем доказательство всех шести предложений, вообще говоря, не отличается друг от друга, то ограничимся доказательством только первого предложения. Итак, пусть $\Gamma(x, y) \to S$, $g_m = O(1)$, $g_n^{(1)} = O(1)$, $f_m = O(1)$, $f_n^{(1)} = O(1)$ и ограниченные $\{p_{mn}\}$ $\{q_{mn}\}$ и $\{r_{mn}\}$ стремятся к нулю при $m, n \to \infty$. В таком случае $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} \Delta V_{kl} = 0$, $V_{kl} = O(1)$, а, следовательно, если воспользоваться теоремой Кипиани [1], то $f_2(x, y) \to 0$, $x, y \to \infty$. Тогда

$$f_1(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}(x, y)\, \Delta H_{kl} \to S, \; x, y \to \infty. \tag{5}$$

Представим (3) в виде

$$H_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k p_k}{\lambda_{m+1} p_{m+1}}\right)\left(1 - \frac{\lambda_l^{(1)} p_l^{(1)}}{\lambda_{n+1}^{(1)} p_{n+1}^{(1)}}\right) u_{kl}.$$

Легко доказать, что

$$H_{mn} - H_{m-1n} = \frac{g_m}{\lambda_m}\,(p_{mn} - f_{n+1}^{(1)} r_{mn}), \quad H_{mn} - H_{mn-1} = \frac{g_n^{(1)}}{\lambda_n^{(1)}}\,(q_{mn} - f_{m+1} r_{mn}).$$

Поэтому

$$t^{*}_{mn} = \lambda_m \sum_{l=1}^{n} \Delta H_{ml} = \lambda_m (H_{mn} - H_{m-1n}) = g_m (p_{mn} - f_{n+1}^{(1)} r_{mn}),$$

$$\tau^{*}_{mn} = \lambda_n^{(1)} \sum_{k=1}^{m} \Delta H_{kn} = g_n^{(1)} (q_{mn} - f_{m+1} r_{mn}),$$

откуда

$$t^{*}_{mn} = o(1), \quad \tau^{*}_{mn} = o(1), \; m, n \to \infty. \tag{6}$$

Так как по предположению условия (6) применительно к преобразованию (5) являются тауберовыми, то $\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \Delta H_{kl} = H_{mn} \to S$, $m, n \to \infty$, а следовательно, в силу (2), $S_{mn} \to S$, $m, n \to \infty$.

Примечание. Если $q_{mn} = o(1)$, $(f_m)^{-1} = O(1)$, $\lambda_m p_m \uparrow \infty$, $q_m \to \infty$ (или $p_{mn} = o(1)$, $(f_n^{(1)})^{-1} = O(1)$, $\lambda_n^{(1)} p_n^{(1)} \uparrow \infty$, $q_n \to \infty$), то $r_{mn} = o(1)$. Это следует из тождеств

$$r_{mn} = \frac{q_{mn}}{f_{m+1}} - \frac{1}{q_m} \sum_{k=1}^{m} (\lambda_{k+1} p_{k+1} - \lambda_k p_k)\, q_{kn}, \quad r_{mn} = \frac{p_{mn}}{f_n^{(1)}} -$$

$$- \frac{1}{q_n^{(1)}} \sum_{l=1}^{n} (\lambda_{l+1}^{(1)} p_{l+1}^{(1)} - \lambda_l^{(1)} p_l^{(1)})\, p_{ml}.$$

Доказанная теорема обобщает результат, известный для одномерного случая [2].

Выделим класс методов, для которых $t_{mn} = o(1)$, $\tau_{mn} = o(1)$ являются тауберовыми условиями.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\gamma_{kl}^{(mn)} = \gamma_{mk}^{(1)} \gamma_{nl}^{(2)}$, где $\gamma^{(1)} = \| \gamma_{mk}^{(1)} \|$ и $\gamma^{(2)} = \| \gamma_{nl}^{(2)} \|$ — γ-матрицы [3]. $\gamma^{(1)}$-метод, для которого

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} |\Gamma_{mk}^{(1)}| = O(1), \quad \Gamma_{mk}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_k}(\gamma_{mk}^{(1)} - 1), \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$$\Gamma_{mk}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_k}\, \gamma_{mk}^{(1)}, \quad k > m;$$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{mk}^{(1)} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots,$

обозначим через $(\gamma^{(1)}, \lambda)$.

$\gamma^{(2)}$-метод, для которого

3) $\sum\limits_{l=1}^{\infty} |\Gamma_{nl}^{(2)}| = O(1), \; \Gamma_{nl}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_l^{(1)}}(\gamma_{nl}^{(2)} - 1), \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \; \Gamma_{nl}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_l^{(1)}} \gamma_{nl}^{(2)}, \; l > n;$

4) $\lim\limits_{l\to\infty} \gamma_{nl}^{(2)} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$

обозначим через $(\gamma^{(2)}, \lambda^{(1)})$.

Γ-метод, для которого $\gamma^{(1)}$- и $\gamma^{(2)}$- методы являются соответственно $(\gamma^{(1)}, \lambda)$- и $(\gamma^{(2)}, \lambda_1)$-методами, обозначим через Γ^*.

Будем говорить, что двойной ряд (1) принадлежит классу D, если сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{mk}^{(1)} u_{kl}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} u_{kl}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если двойной ряд* (1), *принадлежащий классу* D, Γ^*-*суммируем к* S, *то он сходится к* S, *если ограниченные* $\{t_{mn}\}$ *и* $\{\tau_{mn}\}$ *сходятся к нулю при* $m, n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим следующее тождество, заменяя при этом, в силу (7), двойной ряд повторным:

$$\Gamma_{mn} - S_{mn} = \left[\sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} (S_{ml} - S_{ml-1}) - S_{mn}\right] + \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{mk}^{(1)} u_{kl} - \right.$$

$$\left. - (S_{ml} - S_{ml-1})\right] = \sigma_{mn}^{(1)} + \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} \sigma_{ml}^{(2)} = \sigma_{mn}^{(1)} + \sigma_{mn}^{(3)}. \tag{8}$$

Покажем, что $\sigma_{mn}^{(1)} = o(1)$, $\sigma_{mn}^{(3)} = o(1)$. С этой целью заметим, что

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda_k} t_{kn}, \quad S_{mn} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\lambda_l^{(1)}} \tau_{ml},$$

а, следовательно,

$$S_{mn} - S_{mn-1} = \frac{1}{\lambda_n^{(1)}} \tau_{mn}, \quad S_{mn} - S_{m-1n} = \frac{1}{\lambda_m} t_{mn}.$$

В таком случае

$$\sigma_{mn}^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} \frac{1}{\lambda_l^{(1)}} \tau_{ml} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\lambda_l^{(1)}} \tau_{ml} = \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_{nl}^{(2)} \tau_{ml}.$$

Так как $|\tau_{mn}| < \varepsilon$, $m, n > N$, а матрица $\|\Gamma_{nl}^{(2)}\|$ является регулярной на классе нуль-последовательностей, то для достаточно больших значений m и n

$$|\sigma_{mn}^{(1)}| \leqslant \sum_{l=1}^{\nu} |\Gamma_{nl}^{(2)}| |\tau_{ml}| + \sum_{l=\nu+1}^{\infty} |\Gamma_{nl}^{(2)}| |\tau_{ml}| < \varepsilon,$$

где $\nu > N$. Далее,

$$\sigma_{ml}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{mk}^{(1)} \Delta S_{kl} - \sum_{k=1}^{m} \Delta S_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{mk}^{(1)} \frac{1}{\lambda_k} (t_{kl} - t_{kl-1}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda_k} (t_{kl} - t_{kl-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_{mk}^{(1)} (t_{kl} - t_{kl-1}).$$

А так как

$$\sum_{l=1}^{N} \gamma_{nl}^{(2)} (t_{kl} - t_{kl-1}) = \sum_{l=1}^{N-1} (\gamma_{nl}^{(2)} - \gamma_{nl+1}^{(2)}) t_{kl} + \gamma_{nN}^{(2)} t_{kN},$$

то, принимая во внимание условие 4),

$$\sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} (t_{kl} - t_{kl-1}) = \sum_{l=1}^{\infty} (\gamma_{nl}^{(2)} - \gamma_{nl+1}^{(2)}) t_{kl}.$$

Следовательно,

$$\sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_{mk}^{(1)} (\gamma_{nl}^{(2)} - \gamma_{nl+1}^{(2)}) t_{kl}.$$

Заметим, что матрицы $\| \Gamma_{mk}^{(1)} \|$ и $\| \gamma_{nl}^{(2)} - \gamma_{nl+1}^{(2)} \|$ регулярны на классе нуль-последовательностей. В таком случае, если применить теорему Робисона [4], $\sigma_{mn}^{(3)} = o(1)$. Тогда, как показывает (8), $S_{mn} \to S$, $m, n \to \infty$.

Двойной ряд (1) (A, δ, ν)-суммируем к S, если

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \sum_{k,l=1}^{\infty} x^{\delta_k} y^{\nu_l} u_{kl} \to S, \ \delta_k \uparrow \infty, \ \nu_l \uparrow \infty.$$

Будем говорить, что двойной ряд (1) принадлежит классу D_1, если сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\delta_{m+1}}\right)^{\delta_k} u_{kl}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\nu_{n+1}}\right)^{\nu_l} u_{kl}.$$

Положим $\Delta\delta_m = \delta_{m+1} - \delta_m$, $\Delta\nu_n = \nu_{n+1} - \nu_n$ и

$$t_{mn}^{(1)} = \frac{\delta_m}{\Delta\delta_m} \sum_{l=1}^{n} u_{ml}, \quad \tau_{mn}^{(1)} = \frac{\nu_n}{\Delta\nu_n} \sum_{k=1}^{m} u_{kn}.$$

Теорема 3. *Если двойной ряд* (1), *принадлежащий классу* D_1, (A, δ, ν)-*суммируем к* S, *то он сходится к* S, *если ограниченные* $\{t_{mn}^{(1)}\}$ *и* $\{\tau_{mn}^{(1)}\}$ *стремятся к нулю при* $m, n \to \infty$.

Доказательство. Положим $x = 1 - 1/\delta_{m+1}$, $y = 1 - 1/\nu_{n+1}$. Тогда

$$\Gamma_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} (1 - 1/\delta_{m+1})^{\delta_k} (1 - 1/\nu_{n+1})^{\nu_l} u_{kl} \to S, \ m, n \to \infty.$$

Рассмотрим Г-матрицу, для которой

$$\gamma^{(1)} = \| (1 - 1/\delta_{m+1})^{\delta_k} \|, \ \gamma^{(2)} = \| (1 - 1/\nu_{n+1})^{\nu_l} \|.$$

Положим в теореме 2 $\lambda_m = \delta_m / \Delta\delta_m$. В таком случае, принимая во внимание, что $(1 - a)^{\alpha} < \alpha (1 - a)$, имеем:

а) $\sum_{k=1}^{m} [1-(1-1/\delta_{m+1})^{\delta_k}]\frac{\Delta\delta_k}{\delta_k} \leqslant \frac{1}{\delta_{m+1}}\sum_{k=1}^{m}\Delta\delta_k = O(1);$

б) $\sum_{k=m+1}^{\infty} (1-1/\delta_{m+1})^{\delta_k}\frac{\Delta\delta_k}{\delta_k} \leqslant \frac{1}{\delta_{m+1}}\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-1/\delta_{m+1})^{\delta_k}\Delta\delta_k \leqslant \frac{1}{\delta_{m+1}}\int_{\delta_m}^{\infty}(1-$
$-1/\delta_{m+1})^t dt = O(1);$

в) $\lim_{k\to\infty}(1-1/\delta_{m+1})^{\delta_k} = 0.$

Другими словами, $\gamma^{(1)}$-матрица является $(\gamma^{(1)}, \lambda)$-матрицей, а следовательно, если положить в теореме 2 $\lambda_n^{(1)} = \nu_n/\Delta\nu_n$, то $\gamma^{(2)}$-матрица является $(\gamma^{(2)}, \lambda^{(1)})$-матрицей. Осталось применить теорему 2.

Теорема 4. *Если двойной ряд* (1), *принадлежащий классу* D_1, (A, δ, ν)-*суммируем к* S, *то он сходится к* S, *если ограниченные* $\{p_{mn}^{(1)}\}$ *и* $\{q_{mn}^{(1)}\}$ *стремятся к нулю при* $m, n\to\infty$, *где*

$$p_{mn}^{(1)} = \frac{1}{\delta_{m+1}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\delta_k u_{kl}, \quad q_{mn}^{(1)} = \frac{1}{\nu_{n+1}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\nu_l u_{kl}.$$

Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой 3 и теоремой 1 (предложение 1), положив в ней $q_m = \delta_{m+1}$, $q_n^{(1)} = \nu_{n+1}$, $\lambda_m = \delta_m/\Delta\delta_m$, $p_m = \Delta\delta_m$, $\lambda_n^{(1)} = \nu_n/\Delta\nu_n$, $p_n^{(1)} = \Delta\nu_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кипиани Г. Г. О преобразовании двойных рядов. — Сообщ. АН ГрузССР, 1971, **61**, № 3, с. 529—532.
2. Meyer-König W., Thietz H. Über Umkehrbedingungen in der Limitirungstheorie. — Arch. mat., 1969, **5**, N 4, S. 177—186.
3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Изд-во иностр. лит., 1960. 471 с.
4. Robison G. M. Divergent double Sequences and Series. — Trans. Amer. Mat. Soc., 1926, **28**, p. 50—73.

Днепропетровский
государственный университет

Поступила в редакцию
28.III. 1976 г.